



ПРОМЕЖУТОЧНАЯ
АТТЕСТАЦИЯ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

Тесты для
промежуточной
аттестации и
текущего контроля

10-й класс



Под редакцией **Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова**

МАТЕМАТИКА

10-й КЛАСС

ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ И ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ

Учебно-методическое пособие

Издание второе, переработанное



ЛЕГИОН-М
Ростов-на-Дону
2011

ББК 74.262.21
М34



Рецензенты:

Н. М. Резникова — учитель высшей категории

С. О. Иванов — аспирант каф. АДМ, ЮФУ

Авторский коллектив:

Л. Н. Евич, Л. С. Ольховая, А. В. Горбачёв, Е. А. Войта,

Г. Л. Нужа

М34 Математика. 10-й класс. Тесты для промежуточной аттестации и текущего контроля: учебно-методическое пособие /
Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. — Изд. 2-е, перераб. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2011. — 144 с. — (Промежуточная аттестация)

ISBN 978-5-91724-086-2

Пособие содержит **40 вариантов итоговых работ** по математике, предназначенных для учащихся 10-х классов общеобразовательных учреждений. Авторы предлагают следующую структуру изложения материала: 20 вариантов, включающих задания с логарифмами без производной, и 20 вариантов, содержащих задания с производной без логарифмов.

Выполнение предложенных заданий поможет обучающемуся подготовиться к различным формам текущего контроля и промежуточной аттестации, а также систематизировать знания и практические навыки при подготовке к ЕГЭ, а учителям — создать собственный банк тестовых заданий для последовательного мониторинга обученности каждого учащегося.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-91724-086-2

© ООО «Легион-М», 2011.

Оглавление

От авторов	5
Часть 1. Учебно-тренировочные тесты (без производной)	6
План итоговой работы по спецификации ЕГЭ (варианты 1–10)	6
План итоговой работы по дидактическим линиям (варианты 11–20)	10
Инструкция по выполнению работы	13
Вариант №1	14
Вариант №2	16
Вариант №3	19
Вариант №4	22
Вариант №5	24
Вариант №6	26
Вариант №7	28
Вариант №8	31
Вариант №9	33
Вариант №10	35
Вариант №11	37
Вариант №12	39
Вариант №13	40
Вариант №14	42
Вариант №15	43
Вариант №16	44
Вариант №17	46
Вариант №18	47
Вариант №19	48
Вариант №20	50
Ответы к тестам	52
Решение варианта №1	56
Решение варианта №11	63

Часть 2. Учебно-тренировочные тесты (без логарифмов)	68
План итоговой работы по спецификации ЕГЭ	
(варианты 1–10)	69
План итоговой работы по дидактическим линиям	
(варианты 11–20)	72
Инструкция по выполнению работы	76
Вариант №1	77
Вариант №2	79
Вариант №3	82
Вариант №4	84
Вариант №5	87
Вариант №6	90
Вариант №7	93
Вариант №8	96
Вариант №9	98
Вариант №10	101
Вариант №11	104
Вариант №12	106
Вариант №13	107
Вариант №14	109
Вариант №15	111
Вариант №16	112
Вариант №17	114
Вариант №18	115
Вариант №19	117
Вариант №20	118
Ответы к тестам	121
Решение варианта №1	125
Решение варианта №11	131
Литература.	138

От авторов

Одним из эффективных методов подготовки к ЕГЭ по математике учащихся 10-х классов является тренировочное тестирование, по результатам которого можно осуществить оценку уровня их обученности и провести работу над ошибками.

Пособие позволит

- учащимся самостоятельно подготовиться к текущим контрольным работам и промежуточной аттестации по математике, оценить уровень своей подготовки;
- учителям составить собственную базу тестовых материалов с целью контроля за успешностью освоения программы по предмету.

Предлагаемое пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит 20 вариантов тренировочных тестов, включающих задания с логарифмами (без производной), вторая часть — 20 вариантов тестов, включающих задания с производной (без логарифмов). Структура каждой части книги одинакова: первые 10 вариантов соответствуют демонстрационному варианту ФИПИ; варианты с 11 по 20-й составлены в традиционной последовательности согласно дидактическим линиям курса математики. Каждая часть пособия содержит также решения двух вариантов.

Все варианты содержат задания базового (B1 — B12) и повышенного (C1 — C6) уровней сложности. Критерии оценивания заданий строго дифференцированы и приведены в инструкции.

Тесты прошли апробацию в общеобразовательных учреждениях г. Ростова-на-Дону. В апробации приняли участие около 500 учащихся 10-х классов. По результатам апробации в задания были внесены соответствующие коррективы.

Часть I. Учебно-тренировочные тесты (без производной)

План итоговой работы по спецификации ЕГЭ

Вариант 1–10

№ п/н	Обозначение задания	Проверяемые умения	Коды проверяемых элементов содер- жания и элементы содержания	Уровень сложности	Макс. балл	Время выполнения
1	2	3	4	5	6	7
1	B1	Уметь решать тексто- вые задачи, используя приобретённые зна- ния в практической ситуации	1.1.1. Целые числа. 1.1.3. Дроби, про- центы, рациональ- ные числа.	Б	1	5
2	B2	Уметь описывать за- висимость между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, пред- ставленную в табли- цах, на диаграммах, графиках	6.2.1. Табличное и графическое пред- ставление данных. 3.1. Определение и график функции. 3.2. Элементарное исследование функций. 3.3. Основные элементарные функции.	Б	1	3
3	B3	Уметь выполнять тождественные пре- образования выраже- ний	1.4.1. Преобразо- вание выражений, включающих арифметические операции. 1.4.2. Преобразо- вание выражений, включающих опе- рацию возведения в степень.	Б	1	5

1	2	3	4	5	6	7
			<p>1.4.3. Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени.</p> <p>1.4.4. Преобразование тригонометрических выражений.</p> <p>1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования.</p>			
4	B4	Уметь исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем. Находить геометрические величины	<p>5.1. Планиметрия.</p> <p>5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.</p>	Б	1	3
5	B5	Уметь решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического содержания	<p>2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.</p>	Б	1	5
6	B6	Уметь решать уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком модуля	<p>1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа.</p>	Б	1	5
7	B7	Уметь находить множество значений функции	<p>3.1.2. Множество значений функции.</p>	Б	1	5

1	2	3	4	5	6	7
8	В8	Уметь решать иррациональные уравнения	2.1.3. Иррациональные уравнения.	Б	1	5
9	В9	Уметь решать прикладные задачи физического характера	4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.	Б	1	5
10	В10	Уметь решать алгебраические уравнения	2.1. Уравнения.	Б	1	5
11	В11	Уметь решать содержательные задачи из различных областей науки и практики	2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.	Б	1	7
12	В12	Уметь решать стереометрические задачи на нахождение геометрических величин	5.2. Прямые и плоскости в пространстве. 5.3. Многогранники.	Б	1	5
13	С1	Уметь решать комбинированные системы уравнений	2.1.8. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными. 2.1.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.	П	2	10

1	2	3	4	5	6	7
14	C2	Уметь решать показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения	2.1.4. Тригонометрические уравнения. 2.1.5. Показательные уравнения. 2.1.6. Логарифмические уравнения.	П	2	10
15	C3	Уметь решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин	5.1. Планиметрия.	П	3	15
16	C4	Уметь решать показательные и логарифмические неравенства	2.2.3. Показательные неравенства. 2.2.4. Логарифмические неравенства.	П	3	15
17	C5	Уметь решать уравнения и неравенства, содержащие параметр	2.2.1. Квадратные неравенства. 2.2.4. Логарифмические неравенства. 2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств. 2.2.9. Метод интервалов. 2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.	В	4	20
18	C6	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	1.1. Числа, корни и степени. 1.2. Основы тригонометрии. 1.3. Логарифмы.	В	4	20

План итоговой работы по дидактическим линиям

Варианты 11–20

№ п/н	Обозначение задания	Проверяемые умения	Коды проверяемых элементов содер- жания и элементы содержания	Уровень сложности	Макс. балл	Время выполнения
1	2	3	4	5	6	7
1	В1	Владеть понятием степени с рациональным показателем, уметь выполнять тождественные преобразования и находить значение степеней	1.1.6. Степень с рациональным показателем и её свойства. 1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень.	Б	1	3
2	В2	Уметь выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений	1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени. 1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования.	Б	1	3
3	В3	Уметь решать простейшие показательные уравнения	2.1.5. Показательные уравнения.	Б	1	3
4	В4	Уметь решать простейшие логарифмические уравнения	2.1.6. Логарифмические уравнения.	Б	1	3
5	В5	Уметь решать простейшие логарифмические неравенства	2.2.4. Логарифмические неравенства.	Б	1	4

1	2	3	4	5	6	7
6	B6	Уметь находить область определения функции (решение простейшего показательного неравенства)	3.1.1 Функция, область определения функции. 2.2.3. Показательные неравенства.	Б	1	4
7	B7	Уметь находить множество значений функции, заданной аналитически	3.1.2. Множество значений функции.	Б	1	4
8	B8	Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения	2.1.4. Тригонометрические уравнения.	Б	1	4
9	B9	Уметь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений	1.4.4. Преобразования тригонометрических выражений.	Б	1	4
10	B10	Уметь решать уравнения, используя основное логарифмическое тождество	1.3.1. Логарифм числа. 3.1.1. Область определения функции, содержащей аргумент под знаком логарифма.	Б	1	7
11	B11	Уметь выполнять тождественные преобразования степенных выражений и находить их значение	1.1.6. Степень с рациональным показателем и её свойства.	Б	1	10
12	B12	Уметь решать иррациональные уравнения	2.1.3. Иррациональные уравнения.	Б	1	10
13	C1	Уметь решать комбинированные уравнения, выполнять отбор корней	3.1.1. Область определения функции. 2.1.3. Иррациональные уравнения. 2.1.4. Тригонометрические уравнения. 2.1.5. Показательные уравнения. 2.1.6. Логарифмические уравнения.	П	2	10

1	2	3	4	5	6	7
14	C2	Уметь находить область определения сложной функции (решать неравенства, содержащие переменную под знаком модуля)	3.1.1. Область определения функции. 2.2. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля: решать, находить решения по заданному условию.	П	2	12
15	C3	Уметь использовать несколько приёмов при решении уравнений	2.1. Использование нескольких приёмов при решении иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений.	П	3	15
16	C4	Уметь сравнивать значения функций, составлять и решать неравенства, левая и правая части которых представлены сложными функциями	2.2. Решение комбинированных неравенств. 2.2.3. Показательные неравенства: решать, находить решения по заданному условию. 2.2.4. Логарифмические неравенства: решать, находить решения по заданному условию.	П	3	15
17	C5	Уметь решать системы уравнений с двумя переменными	2.1.7. – 2.1.11. Системы, содержащие уравнения разного вида (иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические): решать, находить решения по заданному условию.	В	4	15
18	C6	Уметь решать уравнения с параметрами	2.1. Уравнения с параметрами. Решать и отбирать корни по заданному условию.	В	4	20

Инструкция по выполнению работы.

На выполнение работы отводится 3 часа. Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий базового уровня (В1–В12) по материалу курса математики. К каждому заданию нужно дать краткий ответ, представленный либо целым числом, либо конечной десятичной дробью. Ориентировочное время выполнения части 1 — 30 минут.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1 – С6). При их выполнении надо записать подробное обоснованное решение и ответ. Ориентировочное время выполнения части 2 — 120 минут.

Исправления и зачёркивания в каждой части теста, если они сделаны аккуратно, не являются поводом для снижения оценки.

За выполнение каждого задания учащийся получает определённое число баллов.

Таблица максимального числа баллов за одно задание

Часть 1	Часть 2			Σ
Задания, №	Задания, №			
1-12	1-2	3-4	5-6	
1	2	3	4	30

Таблица перевода тестовых баллов в школьные оценки

Тестовый балл	Школьная оценка
0 — 6	2
7 — 12	3
13 — 17	4
18 — 30	5

При выполнении работы советуем не торопиться, проверять полученный ответ, творчески подходить к решению каждого задания.

Желаем успеха!

Вариант № 1**Часть 1**

В1. Метр шёлковой ткани стоит 1500 рублей. Какое максимальное целое число метров ткани можно купить на 10 000 рублей после понижения цены на 7%? Ответ запишите целым числом.

В2. На графике (см. рис. 1) показано изменение уровня воды в реке с 10 по 20 марта. На оси абсцисс отчается день, на оси ординат — значение уровня воды в сантиметрах. Определите по графику, сколько дней уровень воды в реке был не выше 300 см.

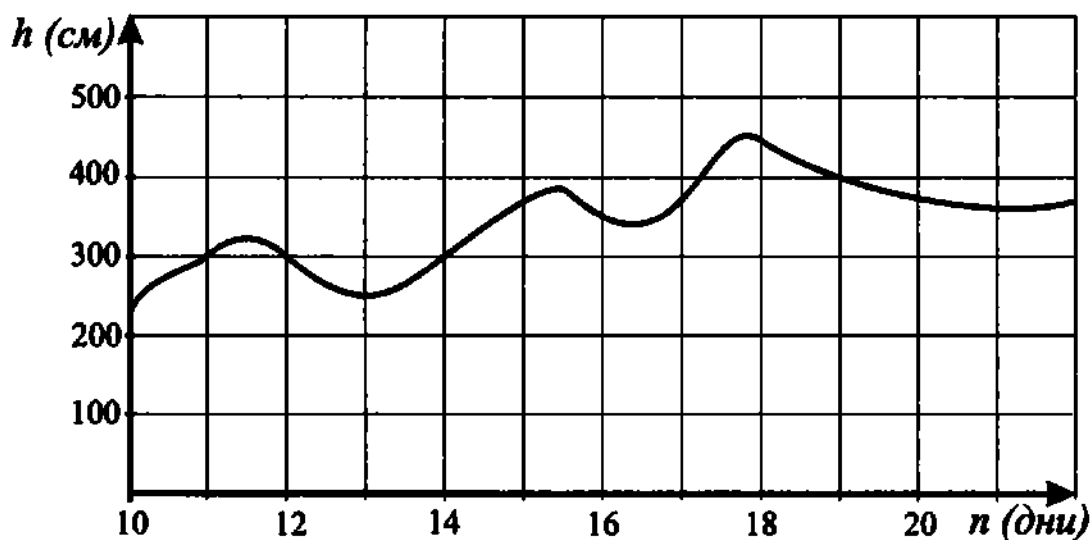


Рис. 1.

В3. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{16}} (\log_5 7 \cdot \log_7 25)$.

В4. Найдите площадь круга, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см \times 1 см (см. рис. 2). Ответ дайте в квадратных сантиметрах (примите $\pi = 3,1$).

В5. Молодая семья планирует купить однокомнатную квартиру не ниже второго этажа общей площадью не менее 42 м². Сколько тысяч рублей предполагается заплатить за самую дешёвую покупку при условии, что к моменту сдачи дома в эксплуатацию инфляция составит 15%, если стоимость квартиры не превышает 1 600 000 рублей, и 10%, если стоимость выше этой суммы? Площадь и стоимость приведены в таблице.

Этаж	Площадь (м ²)	Стоимость (руб. за 1 м ²)
1	45	33 000
2	40	36 000
3	44	38 000
4	41	36 000
5	43	35 000

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|2x - 13| \leq 7$.

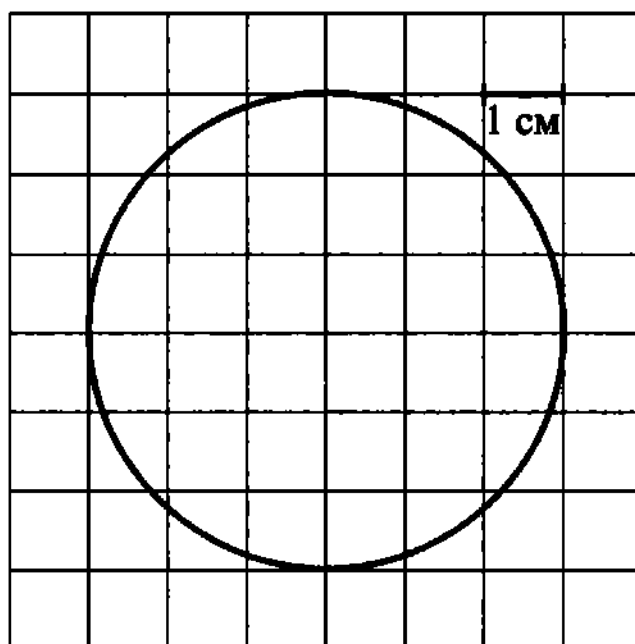


Рис. 2.

В7. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \log_3(9 \sin x)$.

В8. Решите уравнение $\sqrt{3x+1} - 2 = \sqrt{x-1}$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму корней.)

В9. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 70%, если температура холодильника $T_2 = 300^\circ \text{K}$?

В10. Найдите больший корень уравнения $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x) + 2 = 0$.

В11. Имеются два слитка, содержащие серебро. Масса первого слитка на 2 кг больше, чем масса второго. Процентное содержание серебра в первом слитке 40%, во втором слитке 10%. В сплаве этих двух слитков содержание серебра 30%. Найдите массу (в кг) полученного сплава.

В12. Найдите площадь (в см^2) полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 12 см и высотой 8 см.

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x - \cos x = 0,75, \\ \sin x + 0,5\sqrt{y^2 - y - 3} = 0. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5(x^2-9)} = 1$.

С3. Треугольник MNP вписан в окружность радиуса $\frac{\sqrt{111}}{3}$. Найдите MP , если $MN = 4$, $NP = 3$.

С4. Решите неравенство $\log_5((x+7)(x-1)) \leq \frac{1}{3} \log_{\sqrt[3]{5}} 6 - \log_{\frac{1}{5}}(x+7)$.

С5. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых множество значений функции $g(t) = \frac{1-bt+t^2}{1+t+t^2}$ лежит на промежутке $[-5; 5]$.

С6. Найдите все целые n , при которых дробь $c = \frac{n^9+7}{n^2+1}$ — целое число.

Вариант №2

Часть 1

В1. Один рулон обоев стоит 1850 рублей. Ожидается повышение цены на 10%. Какое максимальное число рулонов обоев можно будет купить на 15 000 рублей?

В2. На графике показано изменение температуры в картинной галерее после включения кондиционера (см. рис. 3). На оси абсцисс откладывается время в минутах, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Когда температура достигает определённого значения, кондиционер автоматически выключается и температура начинает расти. По графику определите, до какой температуры кондиционер охладил воздух к моменту второго выключения. Ответ запишите в градусах Цельсия.

В3. Найдите значение выражения $\frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{2 \cdot \cos 5\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,5$.

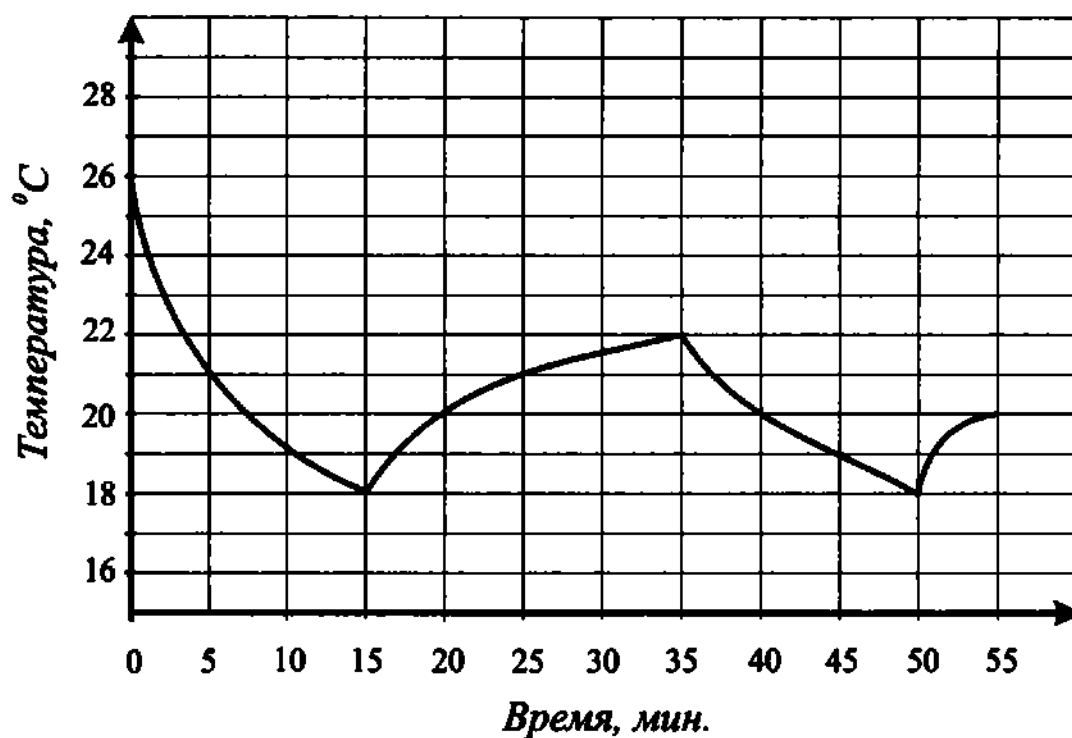


Рис. 3.

В4. Бумага разграфлена на квадратные клетки размером 1 см × 1 см (см. рис. 4). Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке. Ответ запишите в квадратных сантиметрах.

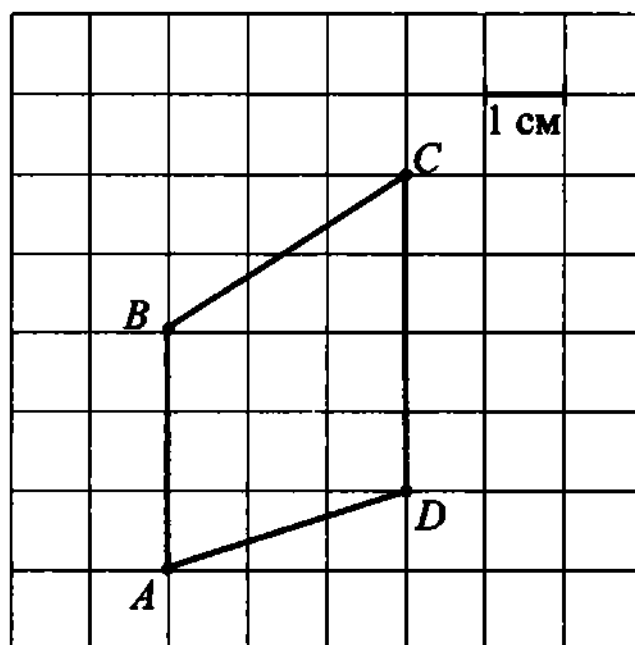


Рис. 4.

В5. Для изготовления скатерти хозяйке потребуется ткань и нитки. Если скатерть делать из полотна, то необходимо купить 2 м ткани, если из батиста — 1,8 м. Если филейную работу (сетка и узор на сетке) выполнить полностью нитками № 80, то потребуется 20 катушек ниток. Если же

сетку выполнить нитками мулине, а узор на сетке — шёлком, то потребуется 9 мотков мулине и 10 пасо (маленький моток ниток) шёлка. Если по периметру скатерти пришить кружево, то потребуется 6,5 м кружев, если вместо этого выполнить мережку широкой подшивкой, то потребуются 3 катушки ниток № 80 или 4 мотка мулине. Сколько рублей придётся затратить на самую дорогую скатерть? Цены в рублях приведены в таблице.

полотно 1 м	батист 1 м	нити № 80 1 катушка	мулине 1 моток	шёлк 1 пасо	кружево 1 м
200	240	22	25	28	15

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|31 - 5x| \leq 7$.

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}(125 \cos x)$.

В8. Решите уравнение $3 - \sqrt{x - 1} = \sqrt{6 - x}$.
(Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму корней.)

В9. Мальчик массой 40 кг разгоняется по льду и врезается в отца массой 60 кг, стоящего неподвижно. Дальше они катятся вместе. Скорость мальчика в момент столкновения с отцом была 3 м/с. После этого они поменялись и повторили опыт.

Насколько больше тепла выделяется во втором случае, чем в первом? Воспользуйтесь законом сохранения импульса

$$m_1 \cdot \bar{v}_1 = (m_1 + m_2) \cdot \bar{v}$$

и законом сохранения энергии

$$E_{\text{нач.}} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2};$$

$$E_{\text{конеч.}} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v^2}{2} + Q.$$

В10. Найдите наименьший корень уравнения $6 + (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 7) = 0$.

В11. Какую массу воды (в г) необходимо добавить к 150 г раствора гидроксида калия с массовой долей 0,1, чтобы получить раствор с массовой долей 0,02?

В12. К диагонали B_1D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ провели перпендикуляр из середины ребра AB . Найдите длину этого перпендикуляра, если ребро куба $\sqrt{2}$.

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + 3 = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x, \\ \cos^2 x + 0,25\sqrt{y^2 - 4y + 13} = 1. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $7^{\log_{\frac{1}{7}}(17-x^2)} = 1$.

С3. В треугольнике ABC $AB = BC = \sqrt{41}$, $AC = 8$. Точка M делит высоту BH в отношении $3 : 2$, считая от вершины. Через точки A , M , C проведена окружность. Найдите радиус окружности, проходящей через точку B и касающейся данной окружности, если её диаметр лежит на прямой BH .

С4. Решите неравенство $\log_x(\log_4(2^x - 4)) < 1$.

С5. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $g(x) = x^2 + |x^2 - 5x - 6| + 10x - a$ принимает только положительные значения.

С6. Среди обыкновенных дробей с натуральными знаменателями, расположенными между числами $\frac{56}{15}$ и $\frac{57}{16}$, найдите дробь с наименьшим знаменателем.

Вариант №3

Часть 1

В1. В прошлом году в городе было 120 тыс. жителей. Найдите численность населения города в этом году, если прирост за год составил 5%. Ответ запишите в тысячах.

В2. Турист отправился из лагеря к озеру, отдохнул у озера и вернулся обратно. На рисунке 5 изображён график движения туриста. По горизонтальной оси откладывается время (в мин.), по вертикальной — значение расстояния, на котором находится турист от лагеря (в км). Найдите скорость туриста (в км/ч) на обратном пути.

В3. Найдите значение выражения $\log_4 \log_{14} 196 + 25^{\log_5 \sqrt{6}-1}$.

В4. Найдите площадь фигуры (см. рис. 6), изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах (примите $\pi = 3$).

В5. Строительной фирме нужно приобрести 550 м^2 линолеума у одного из трёх поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой в рублях? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Цена линолеума (руб. за 1 м ²)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
I	250	850	При заказе на сумму больше 130 000 руб. доставка бес- платно
II	210	950	
III	230	900	При заказе на сумму больше 120 000 руб. доставка бес- платно

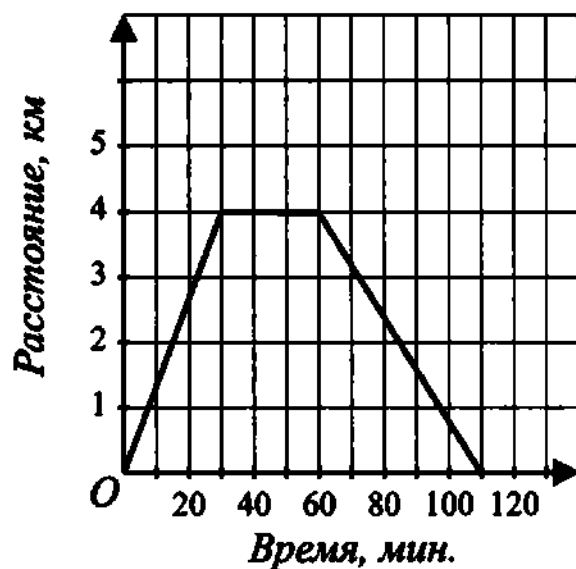


Рис. 5.

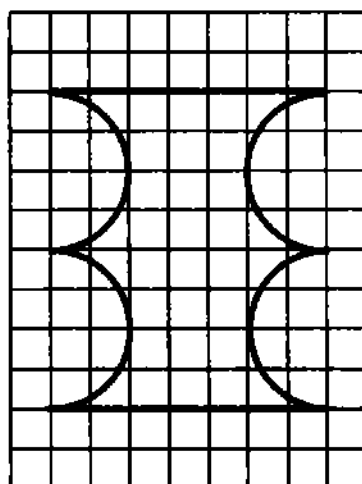


Рис. 6.

В6. Найдите произведение корней уравнения $|3 - x^2| = 1$.

В7. Найдите наибольшее значение функции $y = 3^{\cos^2 x + 1}$.

В8. Решите уравнение $x = \sqrt{2x^2 - 3x - 5} + 1$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите сумму корней уравнения.)

В9. Бассейн объёмом 160 м^3 наполняется двумя трубами. После открытия труб объём воды в бассейне меняется по закону $V(t) = 2t^2 - 14t + 100$, где t — время в часах. В течение какого времени бассейн будет полностью наполнен водой, если откроют одну трубу?

В10. Найдите количество корней уравнения $\sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 3 \cos^3 x = 3 \sin x \cos^2 x$ на промежутке $[0; \pi]$.

В11. Кусок латуни (сплав меди и цинка) содержит меди на 7 кг меньше, чем цинка. Этот кусок сплавил с 12 кг меди и получили латунь, в которой 60% меди. Сколько килограммов меди было в куске латуни первоначально?

В12. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Радиус окружности, описанной около основания пирамиды, равен $2\sqrt{2}$. Найдите площадь поверхности пирамиды.

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}, \\ \cos y - \cos 2x = 0. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $\log_5(2 + 3 \cdot 5^{-x}) = x + 1$.

С3. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, равна 20, а основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Определите радиус окружности, вписанной в треугольник.

С4. Решите неравенство $x^{2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0$.

С5. Найдите все положительные значения a , при которых неравенство $|2x + a|x| - 13| \geq 1$ выполняется для всех x из отрезка $[-3; 3]$.

С6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $25x^2 - y^2 = 9$.

Вариант №4

Часть 1

В1. После объявления о 10%-ной скидке на билет в кино билеты продавались по 270 рублей. Какое максимальное количество билетов можно было купить на 25 000 рублей до скидки?

В2. На графике (см. рис. 7) показано движение двух автомобилей. По оси абсцисс отмеряется время движения автомобилей (в ч), по оси ординат — расстояние, пройденное автомобилями (в км). Определите, на сколько километров первый автомобиль проехал больше второго за первые 3 часа движения.

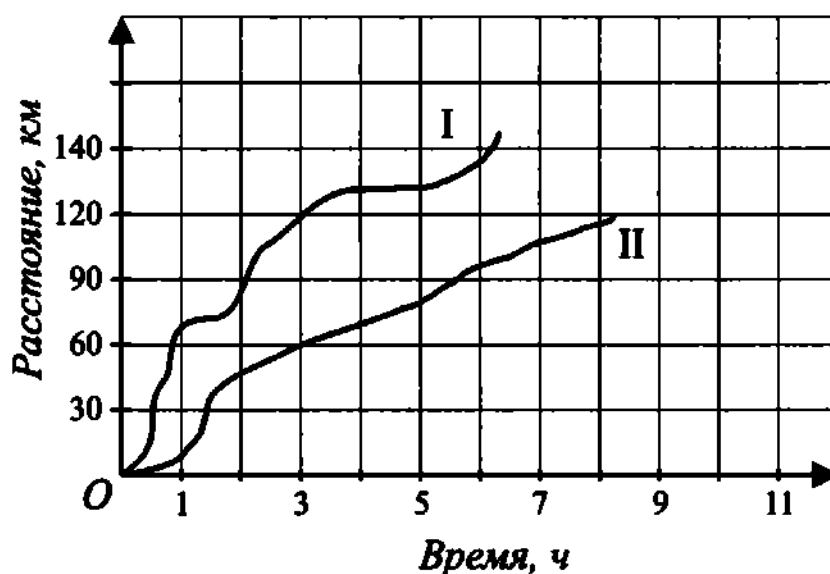


Рис. 7.

В3. Найдите значение выражения $25^{\frac{1}{2} \log_5 12} + 7^{2 \log_7 2}$.

В4. Найдите площадь фигуры (см. рис. 8), изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

В5. Для строительства гаража можно использовать два варианта стен: из кирпича и пеноблоков. Сколько рублей придется заплатить за самый дешёвый вариант строительства? Цены и условия приведены в таблице.

Строит. материал	Количество штук	Цена за 1 шт. (руб.)	Стоимость кладки за 1 шт. (руб.)	Количество цемента в мешках по цене 230 руб. за мешок
кирпич	3500	4,2	4	20
пенобетон	200	92	40	25

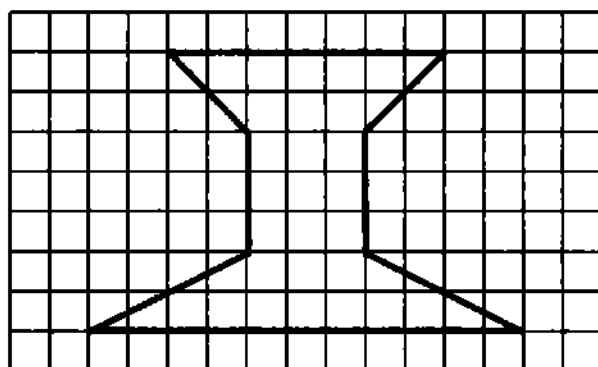


Рис. 8.

В6. Найдите сумму целочисленных решений неравенства $|5x - 2| < 8$.

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = \log_2(x^2 + 4)$.

В8. Решите уравнение $\sqrt{7 - \sqrt{x + 1}} = 2$.

В9. Расстояние от земли до мяча, подброшенного вверх, описывается законом $h(t) = -5t^2 + 30t + 1$, где $h(t)$ — высота, на которую поднимается мяч (измеряется в метрах), t — время, прошедшее с момента начала движения (измеряется в секундах). Определите, через сколько секунд мяч достигнет наибольшей высоты.

В10. Найдите произведение корней уравнения $(2x - 3)(2x - 1)(x + 1)(x + 2) = 36$.

В11. В колбе 200 г 80%-ного спирта. Провизор отлил из колбы некоторое количество этого спирта и затем добавил в неё столько же воды, чтобы получить 60%-ный спирт. Сколько граммов воды добавил провизор?

В12. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12 см, 10 см и 10 см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 60° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x - y} + \frac{1}{2}\sqrt{x + y} = \frac{26 - y}{\sqrt{x - y}}, \\ 10^{3 - \lg(x - y)} = 250. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

С3. Определите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 12 и 20, а диагонали взаимно перпендикулярны.

С4. Решите неравенство $\log_{x+2} (x^2 - 4x + 1) > \log_{\frac{3x-5}{x-6}} 1$.

С5. При каких значениях параметра a неравенство $\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$ выполняется при всех x , принадлежащих отрезку $[1; 2]$.

С6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $36x^2 - y^2 = 27$.

Вариант №5

Часть 1

В1. Коробка цветных карандашей стоит 25 рублей. Какое наибольшее число коробок можно купить на 650 рублей после повышения цены на 10%?

В2. На графике (см. рис. 9) показана среднесуточная температура воздуха в течение недели. На оси абсцисс отмечается время в сутках, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику минимальную температуру в течение наблюдаемого периода.

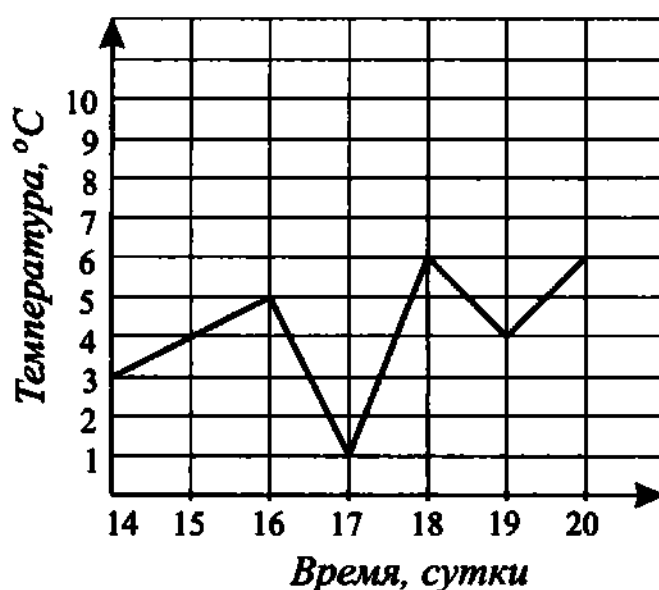


Рис. 9.

В3. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{5}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{5}} 5}$.

В4. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 10. Размер клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

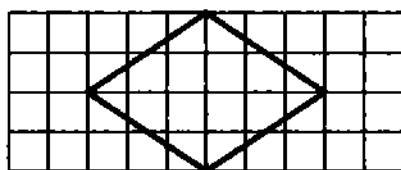


Рис. 10.

В5. Во время ремонта в школе планируется заменить 30 окон. Заказ на окна можно оформить в одной из трёх фирм. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Фирма	Стоимость одного окна (в рублях)	Стоимость доставки (в рублях)	Дополнительные условия доставки (в рублях)
1	6 000	15 000	
2	6 500	12 000	
3	7 000	5 000	При заказе товара на сумму свыше 180 000 доставка бесплатно

В6. Сколько положительных целых чисел входит во множество решений неравенства $|3x - 8| \leq 13$?

В7. Сколько целых чисел входит во множество значений функции $f(x) = 3 \sin^2 x + 2$?

В8. Решите уравнение $\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} = 5$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите произведение корней.)

В9. Из бака, наполненного водой, после открытия крана, находящегося вблизи дна, начинает вытекать вода. При этом высота столба воды в нём меняется по закону $h(t) = 0,03t^2 - 0,24t + 0,48$ (h — высота воды в метрах), где t — время в минутах. Через сколько минут после открытия крана вся вода вытечет из бака?

В10. Найдите больший корень уравнения $2x^2 + 3x - 5 \cdot \sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$.

В11. Сплав меди с цинком, содержащий 80 г цинка, сплавлен со 100 г цинка. В результате содержание цинка в сплаве повысилось по сравнению с первоначальным на 20%. Сколько граммов меди в сплаве?

B12. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат со стороной $3\sqrt{2}$. Высота параллелепипеда равна $\sqrt{7}$. Найдите площадь сечения $AB_1 C$.

Часть 2

C1. Решите систему
$$\begin{cases} 3 \sin^2 x - \sin x \cos x = 2, \\ \cos x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

C2. Решите уравнение $\lg 3x = \frac{1}{2} \lg(x - 8)^2$.

C3. Окружность s проходит через вершину C прямого угла и пересекает его стороны в точках, удалённых от вершины C на расстояние 24 и 10. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности s .

C4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \frac{35 - x^2}{x} \geq -\frac{1}{2}$.

C5. Найдите все целые значения параметра m , при которых неравенство $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2 - x}{x + 4}} \geq mx + 2 - \sqrt{\frac{x + 1}{5 - x}}$ не имеет решений.

C6. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 5. Найдите это число.

Вариант №6

Часть 1

B1. На распродаже был куплен спортивный костюм за 630 рублей. Сколько рублей стоил костюм до распродажи, если цена на него была снижена на 30%?

B2. На графике (см. рис. 11) показана среднесуточная температура воздуха в течение недели. На оси абсцисс отмечается время в сутках, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику, какого числа из наблюдаемого периода температура была максимальной.

B3. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2\log_{\frac{1}{2}} 6}$.

B4. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 12. Размер клетки 1 см \times 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

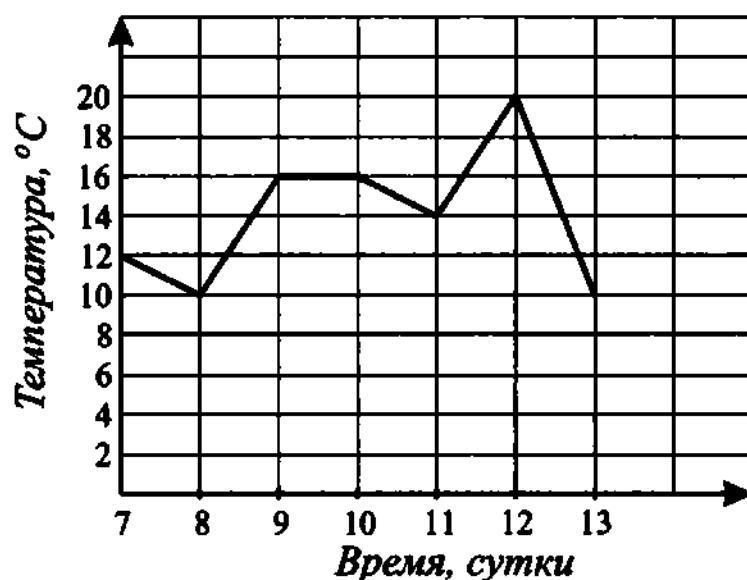


Рис. 11.

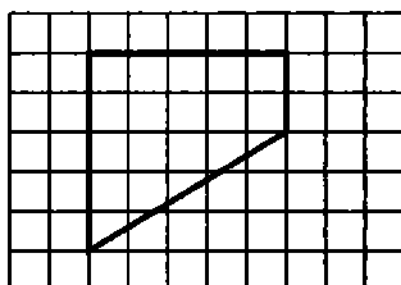


Рис. 12.

В5. В детский сад надо закупить мебель: 30 столов и 150 стульев. Заказ можно оформить в одной из трёх фирм. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Фирма	Стоимость 1 стула (в рублях)	Стоимость 1 стола (в рублях)	Стоимость доставки (в рублях)
1	150	350	5 000
2	120	410	4 000
3	100	410	4 200

В6. Сколько отрицательных целых чисел входит во множество решений неравенства $|2x - 7| \leq 25$?

В7. Сколько целых чисел входит во множество значений функции $f(x) = 2 \cos^2 x - 3$?

В8. Решите уравнение $\sqrt{2x + 5} - \sqrt{3x - 5} = 2$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите произведение корней.)

В9. Из бака, наполненного водой, после открытия крана, находящегося вблизи дна, начинает вытекать вода. При этом высота столба воды

в нём меняется по закону $h(t) = 0,02t^2 - 0,12t + 0,18$ (h — высота воды в метрах), где t — время в минутах. Через сколько минут после открытия крана вся вода вытечет из бака?

В10. Найдите бóльший корень уравнения $x^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} = 12 - 2x$.

В11. Сплав серебра с золотом, содержащий 5 г золота, сплавлен с 15 г золота. В результате содержание серебра, составляющее вначале $\alpha\%$, уменьшилось до величины $(\alpha - 30)\%$. Какой могла быть первоначальная масса сплава? (В ответе укажите наибольшую массу сплава.)

В12. Высота правильной четырёхугольной пирамиды 6, а двугранные углы при основании 60° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $x^{\log_2 x + 1} = 4$.

С3. В параллелограмме $MNPQ$ биссектриса угла N пересекает сторону PQ в точке E и прямую MQ в точке F . Найдите периметр треугольника MNF , если $EQ = 10$, $EF = 8$, $NE = 12$.

С4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3^{x+1} - 9^x) \geq -1$.

С5. При каких значениях параметра m неравенство $\frac{3x^2 - mx + 3}{5x^2 + 3x + 5} < 1$ справедливо при всех значениях x ?

С6. Сумма цифр искомого чётного трёхзначного числа равна 15. Если же это число записать теми же цифрами, но в обратном порядке, то оно окажется на 594 меньше искомого числа. Найти это число.

Вариант № 7

Часть 1

В1. Стоимость билета на автобусную экскурсию составляла 320 рублей. Какое максимальное количество школьников может поехать на экскурсию, если родительский комитет класса выделил на поездку 15000 рублей, а стоимость билета снизилась на 10%?

В2. На графике (см. рис. 13) показано изменение скорости поезда в течение шести часов. На оси абсцисс отчается время (в ч), на оси ординат — значение скорости (в км/ч). Определите, сколько часов скорость поезда была не менее 60 км/ч.

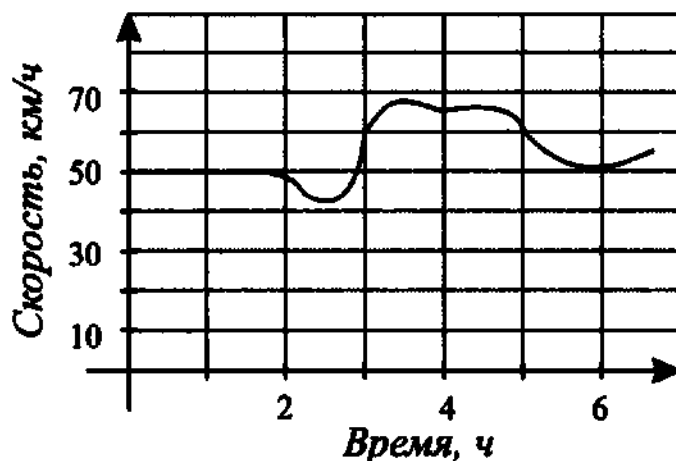


Рис. 13.

В3. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{2}} 16 \cdot \log_5 \frac{\sqrt[4]{5}}{25} : 32^{\log_{32} 4}$.

В4. Найдите площадь фигуры $ABCD$ (см. рис. 14), изображённой на координатной плоскости.

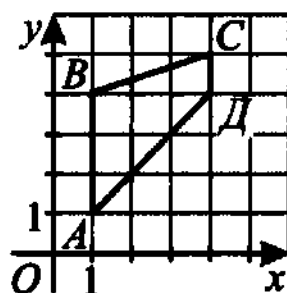


Рис. 14.

В5. Для остекления парника требуется заказать 130 одинаковых стёкол размером 1 м^2 в одной из трёх фирм. Сколько рублей надо заплатить за самый дешёвый заказ? В таблице приведены цены на стекло и на его резку.

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
A	320	12
B	310	15
C	350	10
		Если заказ превышает 42000, то бесплатно

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|5x - 7| \leq 13$.

В7. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4)$.

В8. Решите уравнение $\sqrt{4 - 6x - x^2} - x = 4$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму корней.)

В9. Для предприятия зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 30 - 3p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 63 тыс. рублей.

В10. Найдите наименьший корень уравнения $(x^2 + 9x)(x^2 + 9x + 20) + 96 = 0$.

В11. Кондитерская фабрика производит два вида шоколада: с содержанием какао 25% (молочный) и 70% (горький). Масса молочного шоколада на 3 кг больше, чем горького. В смеси этих двух сортов шоколада содержится 45% какао. Найдите массу полученной смеси.

В12. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной 6 см, если боковые грани наклонены к основанию под углом 30° .

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 + \sqrt{3x^2 - 2x} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $3^{\log_3(x^2 - 4)} = 2x - 5$.

С3. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 12. Найдите бо́льшую сторону треугольника, если $\sin A = \frac{1}{4}$, $\sin B = \frac{1}{3}$.

С4. Решите неравенство $\log_3((x+3)(x-2)) \geq \frac{1}{5} \log_{\sqrt[5]{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$.

С5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых значение выражения $\frac{x^4 - ax^2 - 8}{x^4 + x^2 + 1}$ не равно 1 ни при одном значении переменной $x \in (-1; 3]$.

С6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{121}$, где $a \geq b$.

Вариант №8

Часть 1

В1. Завтрак в школьном буфете стоит 35 рублей. Какое максимальное число школьников можно накормить завтраком на 1000 рублей, если стоимость завтрака снизилась на 5%?

В2. На графике (см. рис. 15) показано изменение температуры воздуха в течение суток. На оси абсцисс отчается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику, сколько часов температура была менее 3°C .

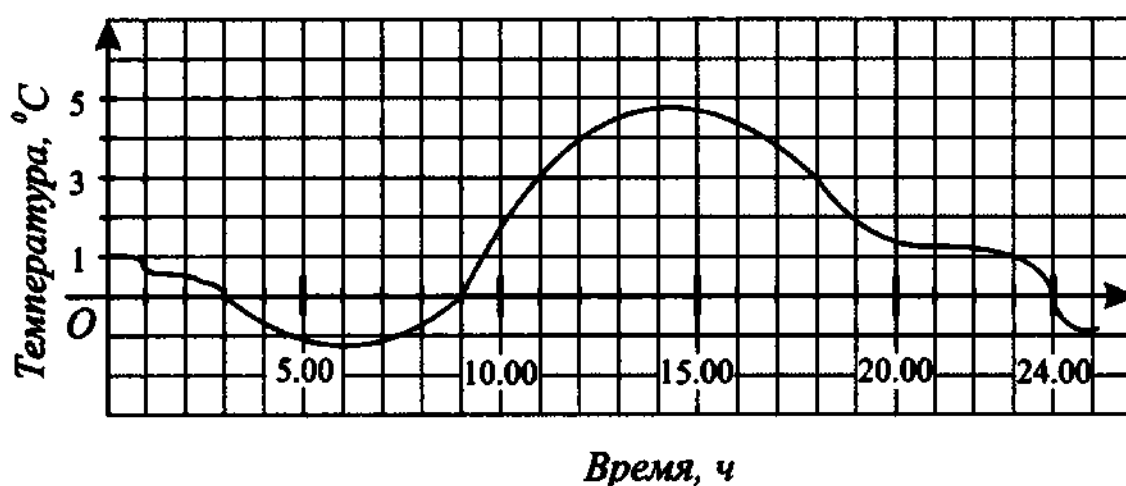


Рис. 15.

В3. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{4}} 64 \cdot \log_2 \frac{\sqrt[4]{4}}{16} : 7^{\log_7 2}$.

В4. Найдите площадь фигуры $ABCD$, изображённой на координатной плоскости (см. рис. 16).

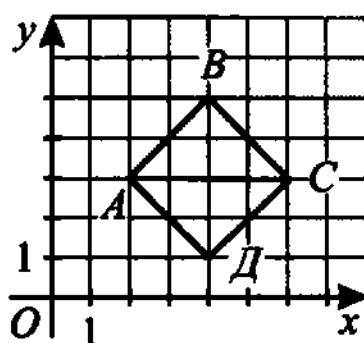


Рис. 16.

В5. Швейной фабрике поступил заказ изготовить рабочие спецовки для шахтёров. В распоряжении фабрики имеются три бригады, каждая из которых состоит из специалистов и учеников. Один специалист за неделю изготавливает 6 спецовок, а ученик — 3. Заказчик платит за каждую спецовку 1500 рублей. Фабрика может поручить заказ только одной бригаде. Сколько тысяч рублей должен заплатить заказчик, чтобы фабрика изготовила за неделю наибольшее число спецовок?

Бригада	Специалистов	Учеников
1	11	10
2	12	6
3	10	8

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|7x - 2| > 9$ на отрезке $[-4; 4]$.

В7. Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 16)$.

В8. Найдите бóльший корень уравнения $\sqrt{2x^2 - 7x + 21} - 1 = x$.

В9. Для предприятия зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 45 - 3p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 162 тыс. рублей.

В10. Найдите $3x_0$, если x_0 — меньший корень уравнения $(3x - 1)^2 - 2|3x - 1| - 3 = 0$.

В11. Смешали два раствора щёлочи. Первый раствор содержит 40% щёлочи, второй — 10% щёлочи. Объём первого раствора на 4 л меньше, чем второго. В смеси этих двух растворов содержится 15% щёлочи. Найдите объём полученной смеси.

В12. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания $12\sqrt{2}$, если её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° .

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7, \\ \operatorname{tg} y = x. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $47^{\log_{47}(25-x^2)} = 24x$.

С3. Треугольник MKN вписан в окружность радиуса 5. Найдите бóльшую сторону треугольника, если $\cos M = \frac{2}{5}$, $\cos N = \frac{1}{5}$.

С4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{7}}(x+1) > \frac{1}{5} \log_{\sqrt[5]{7}}(x-2)$.

С5. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых значение выражения $\frac{2x^4 - bx^2 - 7}{2x^4 + x^2 + 1}$ не равно 1 ни при каком значении переменной $x \in (-1; 2]$.

С6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{49}$, где $x \geq y$.

Вариант №9

Часть 1

В1. Метр ткани стоит 3500 рублей. Какое максимальное число метров ткани можно купить на 30 000 руб., если цена одного метра повысится на 20%? (Ответ запишите целым числом.)

В2. На диаграмме (см. рис. 17) показано изменение количества осадков с 1 по 10 сентября. На оси абсцисс отмечается день, а на оси ординат — количество выпавших осадков в мм/м². Определите по графику, сколько дней количество осадков не превышало 100 мм/м².

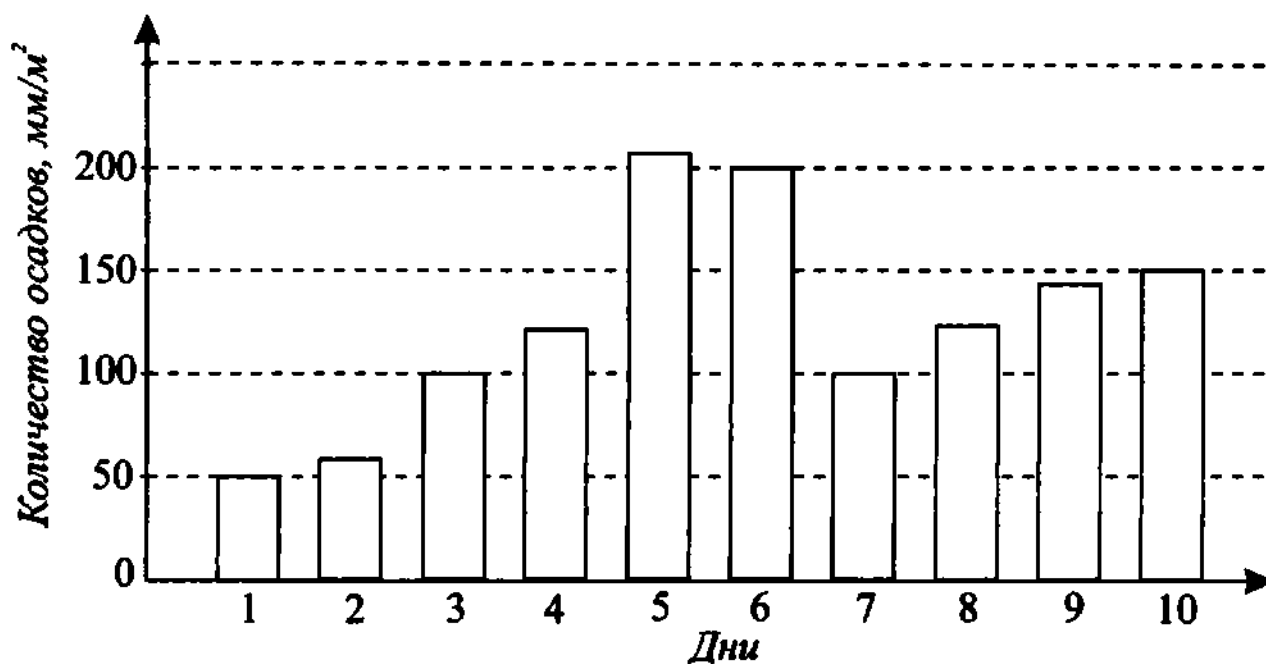


Рис. 17.

В3. Найдите значение выражения $\log_7 4 \cdot \log_2 7 \cdot (\log_3 81 - \log_3 3)$.

В4. Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 18). Ответ дайте в см².

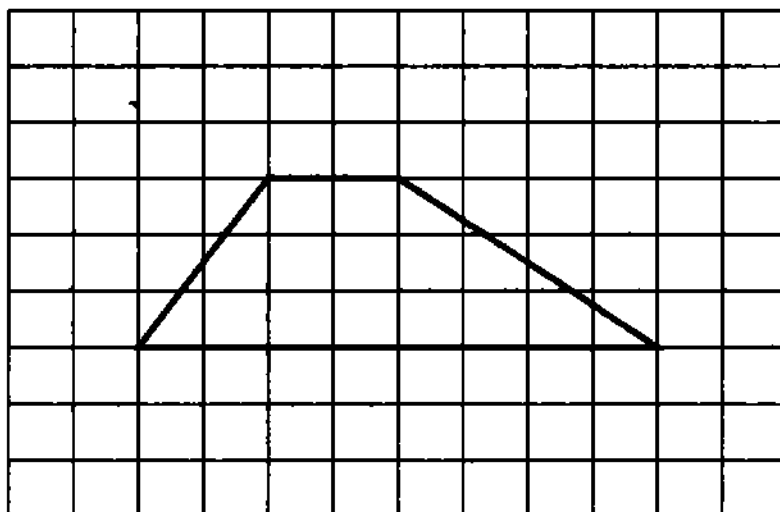


Рис. 18.

В5. Фирме надо приобрести участок площадью не менее 135 га и содержанием в почве минеральных солей не менее 300 г на м^3 . Сколько тысяч рублей придётся затратить на самую дешёвую сделку, если при оформлении договора купли-продажи на сумму не более, чем 2 250 000, взимается комиссия 2%?

Содержание минеральных солей (г)	Площадь (га)	Цена 1 га (руб.)
200	155	17 500
628	140	16 000
394	130	16 000
181	160	14 500
426	150	15 000

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|3x - 4| < 9$.

В7. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \log_{\sqrt{5}}(7 \cos x - 2)$.

В8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 28} = 8$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите их произведение.

В9. Путь, пройденный телом, задан формулой $s(t) = 8t + \frac{3t^2}{2}$. Найдите скорость движения тела к концу второй секунды.

В10. Найдите наименьший корень уравнения $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x) + 3 = 0$.

В11. Концентрация первого соляного раствора равна 60%, а второго — 10%. Объём первого раствора на 3 литра больше, чем второго. Когда оба раствора слили в одну ёмкость, концентрация раствора стала 40%. Найдите объём полученного раствора.

В12. Найдите отношение объёма конуса к числу π , если радиус основания конуса равен 4, а образующая конуса равна 5.

Часть 2

С1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 0,25 \sin^2 x + 0,75 \sin x = 1, \\ \sqrt{\cos^3 x + 18 \cos^2 x + y^2 - 4y - 8} = 2. \end{cases}$$

С2. Решите уравнение $7^{\log_{\sqrt{7}}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} = 3$.

С3. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник со сторонами 9, 10, 11.

С4. Решите неравенство

$$\log_5(x^2 - 14x + 45) - 3 \log_{125}(x - 9) < \frac{1}{2} \log_{\sqrt{5}} 19 - \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt{x - 8}.$$

С5. Найдите все значения b , при которых неравенство $\frac{3 - bt + 2t^2}{3 + 2t + t^2} < 3$ выполняется при любых значениях t .

С6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{16}$, где $t > k$.

Вариант № 10

Часть 1

В1. Золотая рыбка стоит 800 рублей. Сколько рыбок можно будет купить для аквариума, имея 4000 рублей, если рыбка подорожает на 30%?

В2. На диаграмме (см. рис. 19) показано изменение цен на золото с 10 по 19 декабря. На оси абсцисс отмечается день, а на оси ординат — стоимость одного грамма в рублях. Определите по графику, сколько дней цена на золото не превышала 1000 рублей за грамм.

В3. Найдите значение выражения $\log_5 81 \cdot \log_3 5(\lg 25 + \lg 4)$.

В4. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 20). Ответ дайте в см^2 .

В5. Хлебопекарному заводу надо купить на одном складе 20 тонн пшеницы не ниже второго сорта. Сколько тысяч рублей придётся заплатить за самую дешёвую сделку, если государство возмещает 5% средств, потраченных на пшеницу 1 сорта?

Сорт	Количество пшеницы на складе (т)	Цена за тонну (руб.)
3	41	14000
2	21	18000
2	19	17500
1	24	20000
3	16	14500

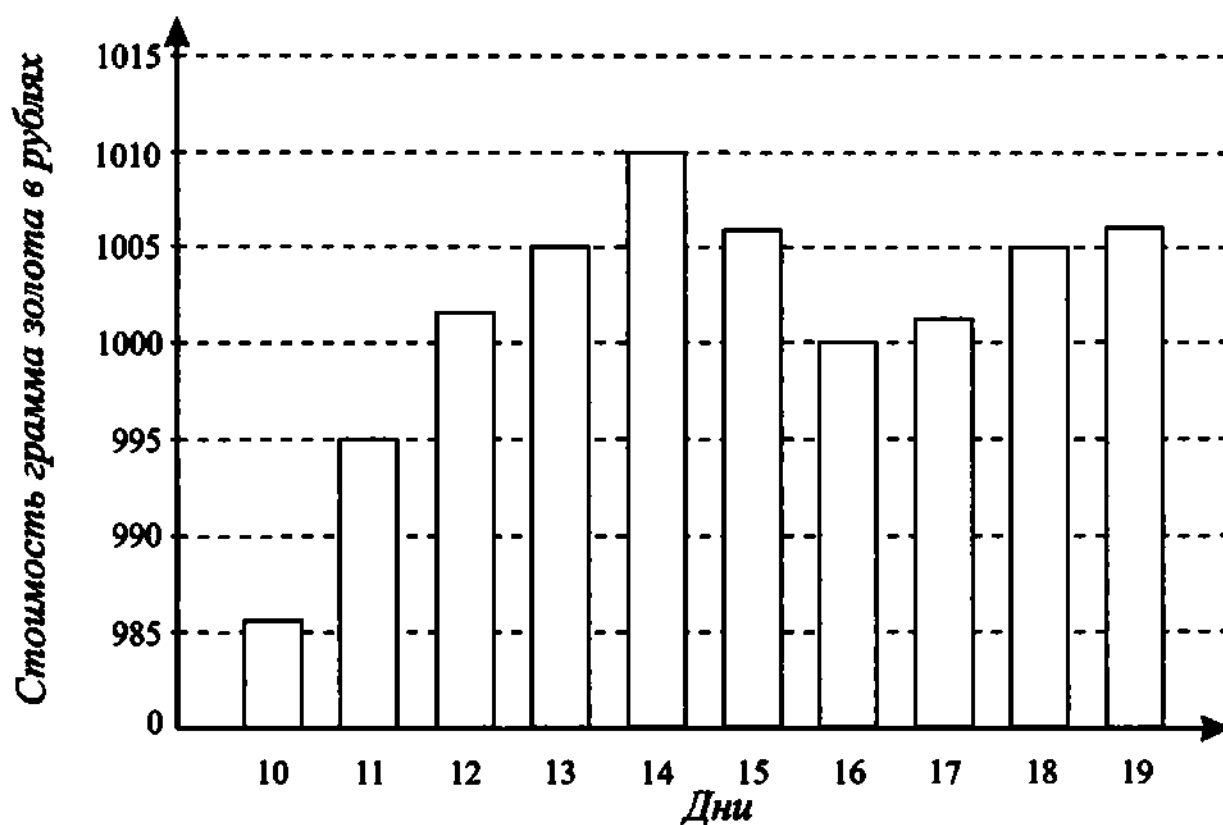


Рис. 19.

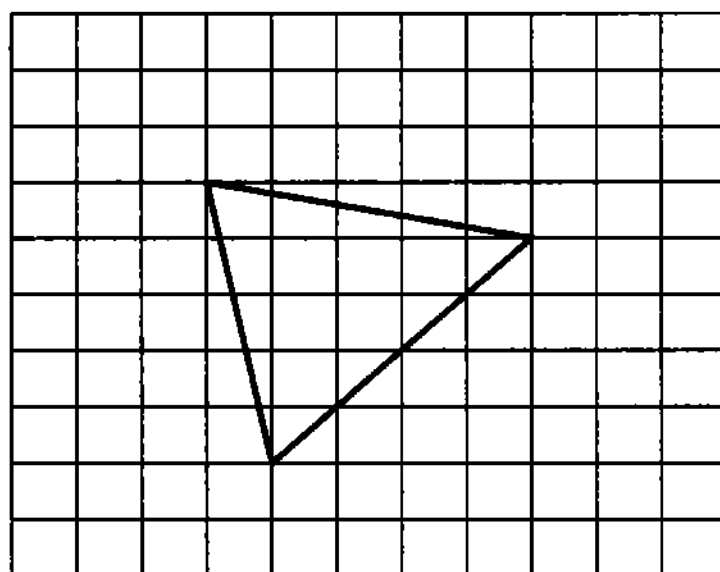


Рис. 20.

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|2x - 5| < 14$.

В7. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \lg(1 + \sin x) + \lg 5$.

В8. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 56} = 9$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите их произведение.

В9. Путь, пройденный телом, задан формулой $s(t) = 128 + 5t + \frac{2}{3}t^2$.

Найдите скорость при $t = 3$ с.

В10. Найдите наименьший целый корень уравнения $(x^2 - 6x)(x^2 - 6x + 4) - 5 = 0$.

В11. Концентрация первого соляного раствора равна 20%, а второго — 50%. Объем первого раствора на 6 литров больше, чем второго. Когда оба раствора слили в одну ёмкость, концентрация раствора стала 26%. Найдите объем полученного раствора.

В12. Найдите радиус основания конуса, у которого длина образующей равна 5, а площадь боковой поверхности — 8π .

Часть 2

С1. Решите систему уравнений $\begin{cases} (\sin x + 12)(\sin x + 13) + 14 = 170, \\ \sqrt{y^2 - 8y + 37 \cos^2 x} = 5. \end{cases}$

С2. Решите уравнение $11^{\log_{121}(x^2 - 4x + 6)^2} = 3$.

С3. В треугольник ABC вписана окружность радиуса $\sqrt{3}$. Найдите AC , если $AB = 7$, $BC = 8$.

С4. Решите неравенство

$$\log_3(x^2 - 12x + 11) - 4\log_9(x - 1)^{\frac{1}{2}} < \log_9(x - 7)^2 + \log_3(x - 11).$$

С5. Найдите все значения параметра b , при которых неравенство $\frac{22 - bt + 3t^2}{4 + 2t + t^2} > 2$ выполняется при любом значении t .

С6. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$, где $m > n$.

Вариант №11

Часть 1

В1. Найдите значение выражения $\frac{16^{\frac{1}{4}} \cdot 81^{\frac{1}{3}}}{375^{\frac{1}{3}}}$.

B2. Найдите значение выражения $\log_6 144 + 2 \log_6 \frac{1}{2} + 1$.

B3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{49}\right)^{3-x} = 343$.

B4. Решите уравнение $\log_3 (x + 2) - 2 = 0$.

B5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_2 (5x - 2) \leq 2$.

B6. Найдите наибольшее значение x из области определения функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - \frac{1}{27}}.$$

B7. Найдите наименьшее целое значение функции

$$y = 4^{-x} + 2?$$

B8. Решите уравнение $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[0; \pi]$. Ответ запишите в градусах.

B9. Упростите выражение $3 \cos^2 \alpha + \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} - 22,4$.

B10. Решите уравнение $\left(\frac{1}{7}\right)^{2 \log_{\frac{1}{7}} (2x-3)} = 5x - 4$.

B11. Вычислите $\left(1,2 \sqrt[3]{9\sqrt{3}} + 1,8 \sqrt{3 \sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{12}{11}}$.

B12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x$.

Часть 2

C1. Сколько корней имеет уравнение $(\cos x - \sin x) \log_3 (5 - x^2) = 0$?

C2. Найдите количество целых чисел, которые не входят в область определения функции $y = \ln(|3x + 7| - |x - 9|)$.

C3. Решите уравнение $5 \cos x \operatorname{ctg} x - 5 \operatorname{ctg} x + 2 \sin x = 0$.

C4. Найдите все значения аргумента x , при которых сумма соответствующих значений функций $f(x) = \frac{1}{5 - \lg x}$ и

$$g(x) = \frac{2}{1 + \lg x} \text{ больше } 1.$$

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 18 = 2y(4y - 9), \\ \sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x - 2y}} = 2. \end{cases}$$

С6. При каких значениях параметра m система уравнений

$$\begin{cases} y = 4 - 2m \sin 2x, \\ y = m \cos^2 x + 2 \sin x - m \end{cases}$$

не имеет решений?

Вариант №12

Часть 1

В1. Найдите значение выражения $\frac{54^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{2}}}{250^{\frac{1}{3}}}$.

В2. Найдите значение выражения $\log_3 4 + 2 \log_3 \frac{1}{2} - 1$.

В3. Найдите корень уравнения $(7^{3+x})^3 = 343$.

В4. Решите уравнение $\log_4 (x - 8) - 3 = 0$.

В5. Найдите количество однозначных целочисленных решений неравенства $\log_3 (2x - 5) > 2$.

В6. Найдите наибольшее значение x из области определения функции

$$y = \sqrt{\frac{1}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-1-3x}}.$$

В7. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

В8. Решите уравнение $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $1 + \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \cdot \sin x \cos x$ и найдите его значение при $x = 2\pi$.

В10. Решите уравнение $5^{\log_5 (x-2)} = x^2 - 4x + 4$.

В11. Вычислите $\left(4,3 \sqrt[5]{5\sqrt{5\sqrt{5}}} + 0,7 \sqrt[20]{5^7}\right)^{\frac{20}{27}}$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $x = \sqrt{4 + 2x - x^2} + 2$.

Часть 2

C1. Сколько корней имеет уравнение $(\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x)\sqrt{-x^2 + 3x} = 0$?

C2. Найдите количество целых чисел, которые не входят в область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt[4]{|5x + 1| - |2x - 3|}}$.

C3. Решите уравнение $125 \cdot 2^{4x} - 9 \cdot 20^{x+1} + 64 \cdot 25^x = 0$.

C4. Найдите сумму всех целых значений аргумента x , при которых сумма соответствующих им значений функций

$$f(x) = \frac{1}{1 + \lg x} \text{ и } g(x) = \frac{1}{1 - \lg x} \text{ больше 2.}$$

C5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3y - 2x}{y}} + \sqrt{\frac{4y}{3y - 2x}} = 2\sqrt{2}, \\ 3(x^2 + 1) = (y + 1)(y - x + 1). \end{cases}$$

C6. При каких значениях параметра p система уравнений

$$\begin{cases} y = 5p + 6 \sin x + p \cos x, \\ y = 3 \cos x + 2p \sin x + p^2 + 6. \end{cases}$$

не имеет решений?

Вариант № 13

Часть 1

B1. Найдите значение выражения $\frac{625^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{3}} \cdot 15^{\frac{1}{3}}}{225^{\frac{1}{3}}}$.

B2. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{6}} 4 + 2 \log_{\frac{1}{6}} 3 - 1$.

B3. Найдите корень уравнения $\left(4^{\frac{1}{2}-x}\right)^2 = \frac{1}{8}$.

B4. Решите уравнение $\log_5 (x + 1) - 3 = 0$.

B5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_2 (4 - x) < 3$.

B6. Найдите наименьшее значение x из области определения функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^{-2x} - \frac{1}{49}}.$$

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = 4 + 2^{-x}$.

В8. Решите уравнение $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $\cos 2x \cos x + \cos(6\pi - x) - \sin 2x \sin x$ и найдите его значение при $x = \frac{\pi}{3}$.

В10. Решите уравнение $13\frac{1}{2} - 5x = 4^{\log_2(x - \frac{3}{2})}$.

В11. Вычислите $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} + (0,001)^{-\frac{1}{3}}$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{4 - 6x - x^2} - 4 = x$.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $(\sin x - \cos x) \log_2(1 - x^2) = 0$?

С2. Найдите количество целых чисел, которые не входят в область определения функции $y = \sqrt{|3x + 2| - |x - 1|}$.

С3. Решите уравнение $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$.

С4. Найдите все значения аргумента x , при которых график функции $y = 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x$ расположен выше графика функции $y = 5 \cdot 6^x$.

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y) \cdot 3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3 \log_5(x + y) = x - y. \end{cases}$$

С6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = a \cos x + 2 \sin x + 5a, \\ y = \cos x + 2a \sin x + a^2 + 4 \end{cases}$$

не имеет решений?

Вариант № 14

Часть 1

В1. Найдите значение выражения $\frac{32^{\frac{1}{4}}}{8^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{4}}}$.

В2. Найдите значение выражения $\log_6 \frac{2}{3} + 2 \log_6 3 + 2$.

В3. Найдите корень уравнения $(3^{2x-1})^2 = 27$.

В4. Решите уравнение $\log_6 (16 + x) - 2 = 0$.

В5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_3 (4 - 2x) \leq 1$.

В6. Найдите наименьшее значение x из области определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} - \frac{1}{6}}$.

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = 3 + 3^{-x}$.

В8. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $1 + \sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}$.

В10. Решите уравнение $15\frac{1}{4} + 5x = 9^{\log_3(x + \frac{5}{2})}$.

В11. Вычислите $\left(2,3 \sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}}} - 1,3\sqrt{2}\right)^2$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{8 - 6x - x^2} - x = 6$.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(1 - 2 \sin \frac{x}{2}\right) \log_2 (4 - x^2) = 0?$$

С2. Найдите количество целых чисел, которые не входят в область определения функции $y = \log_{0,2} (|7x - 2| - |5x + 6|)$.

С3. Решите уравнение $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 2^{4x} = 0$.

С4. При каких значениях x график функции $y = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ расположен ниже графика функции $y = 1 - \cos^2 x$?

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0. \end{cases}$$

С6. При каких целых значениях параметра k система уравнений

$$\begin{cases} y = 2k \sin x - \cos^2 x, \\ y = 15 - 8k \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант № 15

Часть 1

В1. Найдите значение выражения $\frac{375^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27}}{81^{\frac{1}{3}}}$.

В2. Найдите значение выражения $\log_6 4 + 2 \log_6 3 - 1$.

В3. Найдите корень уравнения $5^{3-2x} = \frac{1}{5}$.

В4. Решите уравнение $2 - \log_3 (x + 2) = 0$.

В5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_2 (2x + 7) \leq 3$.

В6. Найдите наибольшее значение x из области определения функции

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{11}\right)^{2x-1} - \frac{1}{121}}.$$

В7. Найдите наибольшее целое значение функции

$$y = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

В8. Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение

$$\frac{\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha}{\cos 4\alpha} - (\cos 2\alpha - \sin 2\alpha)^2 \text{ и найдите его значение при } \alpha = \frac{\pi}{24}.$$

B10. Решите уравнение $7^{\log_7(x+3)} = x^2 + 8x + 13$.

B11. Вычислите $\sqrt{\sqrt{10} - 1} \cdot \sqrt[4]{11 + 2\sqrt{10}} + 4$.

B12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $x = \sqrt{1 + 4x - x^2} + 1$.

Часть 2

C1. Сколько корней имеет уравнение $(\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x)\sqrt{5x - x^2} = 0$?

C2. Укажите наименьшее натуральное число из области определения функции $y = (\sqrt{|2x^2 - 9x + 15|} - 3)^{\frac{3}{2}}$.

C3. Решите уравнение $\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x + 7 - 6\sqrt{x - 2}}$.

C4. Найдите все значения x , при которых точки графика функции $y = \frac{1}{2x - 17}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = -\frac{\log_3^3(2x - 5)}{17 - 2x}$.

C5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3(x - y) = 1 - \log_3(x + y). \end{cases}$$

C6. При каком наименьшем натуральном значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = \sin^2 x - 12a, \\ y = 4 - 6a \sin x \end{cases}$$

не имеет решений?

Вариант № 16

Часть 1

B1. Найдите значение выражения $-3 \cdot 121^{\frac{1}{2}} - 13$.

B2. Найдите значение выражения $\log_2 a$, если $\log_4 a^2 = 8$.

B3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x+1} = 16$.

B4. Решите уравнение $\log_2(x - 1) = 3$.

B5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_4(2x + 3) < 1$.

B6. Найдите наименьшее значение x из области определения функции $y = \sqrt{7^{2x} - \frac{1}{49}}$.

B7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = 2^{-x} + 5$.

B8. Решите уравнение $2 \sin x = \sqrt{3}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

B9. Упростите выражение $5 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 5 \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha - 10$.

B10. Решите уравнение $4^{\log_4(x-6)} = x^2 - 12x + 36$.

B11. Вычислите $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2^{-3}\right) : 49^{-\frac{1}{2}}$.

B12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{3x^2 + 3x + 21} - 5 = x$.

Часть 2

C1. Сколько корней имеет уравнение $(1 - 2 \sin^2 x) \log_7(1 + x - 4x^2) = 0$?

C2. Укажите наименьшее натуральное число из области определения функции $y = (x^2 - |5x - 6|)^{-\frac{3}{2}}$.

C3. Решите уравнение $81^{\cos^2 x} + 30 = 39 \cdot 3^{\cos 2x}$.

C4. Найдите все значения аргумента x , при которых график функции $y = 3^{\frac{\log_1(\frac{x^2}{2})}{2}} + 9$ расположен ниже графика функции $y = 28 \cdot 3^{\frac{\log_1 x}{2}}$.

C5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y} + 7\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}} - 6 = 0, \\ \lg(3x - y) + \lg(x + y) - 4 \lg 2 = 0. \end{cases}$$

C6. Найдите все значения параметра b , при которых графики функций $f(x) = b \operatorname{tg}^2 x$ и $g(x) = 6 - \cos x - b$ имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант № 17

Часть 1

В1. Упростите выражение $\frac{\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^2 \cdot a^{-\frac{1}{10}}}{a^{-\frac{1}{2}}}$ и найдите его значение при $a = 2^{\frac{5}{4}}$.

В2. Найдите значение выражения $4^{\log_2 6 - 0,5}$.

В3. Найдите корень уравнения $81^{2-x} = \frac{1}{9}$.

В4. Решите уравнение $\log_3 (2 - x) = 3$.

В5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_{0,2} (x + 3) > -1$.

В6. Найдите наименьшее значение x из области определения функции $y = \sqrt{\frac{4}{25} - \left(\frac{2}{5}\right)^{x+4}}$.

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} - 3$.

В8. Решите уравнение $\cos (\pi + x) = \frac{1}{2}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $3 \cos^2 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + 3 \sin^2 2x$.

В10. Решите уравнение $7^{\log_7 (x-4)} = (x-4)^2$. В ответе запишите корень уравнения или сумму всех его корней, если их несколько.

В11. Вычислите $\sqrt[4]{34 + 24\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3\sqrt{2} - 4} \cdot \sqrt[4]{324}$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{2x^2 - 7x + 5} + x = 1$.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $(2^{x^3-4x^2} - 16^x) \cdot \log_5 (x - 3) = 0$?

С2. Укажите количество целых чисел из промежутка $(0; 9]$, принадлежащих области определения функции $y = (|3 + x| - 2x)^{\frac{5}{4}}$.

С3. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x \cdot \sin 2x - 1 = 2 \sin 2x - \cos 2x$.

С4. Найдите все значения аргумента x , при которых график функции $y = 9 \cdot 2^{\log_{\frac{1}{3}} x}$ расположен выше графика функции $y = 4^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{3}} + 2$.

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y \log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5}, \\ 5^x - 4 \cdot 5^{\frac{x-1}{2}} \cdot 3^{y-\frac{1}{2}} = 3^{2y-1}. \end{cases}$$

С6. При каких значениях параметра k прямая $y = -4k - 3$ и график функции $y = \cos^2 x - 2k \sin x$ имеют хотя бы одну общую точку?

Вариант №18

Часть 1

В1. Упростите выражение $\frac{b^{-6,3} \cdot b^{3,7} \cdot b^{-9,8}}{(b^4)^{-3,1}}$.

В2. Найдите значения выражения $\frac{3 \log_3 81}{\log_3 \sqrt{27}}$.

В3. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-5} = \frac{1}{8}$.

В4. Решите уравнение $\lg(2x - 6) - 1 = 0$.

В5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_2(3x - 1) \leq 3$.

В6. Найдите наименьшее значение x из области определения функции $y = \sqrt{0,04 - 0,2^{3x-1}}$.

В7. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 7 - 5^x$.

В8. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 1$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $5 \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x + 5 \sin^2 x \operatorname{ctg}^2 x$.

В10. Решите уравнение $\log_8(3x - 2) = 2^{\log_5 \frac{1}{25} + \log_3 27}$.

В11. Вычислите $\sqrt[6]{8 + 2\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{1 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36}$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{2x^2 + 3x + 4} = 2x + 1$.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} - 1 \right) \sqrt{15 + 7x - 2x^2} = 0?$$

С2. Укажите количество целых чисел из промежутка $(-6; 0)$, принадлежащих области определения функции $y = (|3 - x| + x)^{\frac{7}{4}}$.

С3. Решите уравнение $\frac{4^x - 2^{x+2} + 3}{2^{\frac{x}{2}} - 1} + 2^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$.

С4. Найдите все значения x , при которых точки графика функции $y = \frac{5^{4x+1} - 126 \cdot 5^{2x}}{14x - 7}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $y = \frac{25}{7 - 14x}$.

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2, \\ y^{2 \log_y x} = 4y - 3. \end{cases}$$

С6. Найдите все значения параметра p , при которых прямая $y = 3 - p$ и график функции $y = p \operatorname{ctg}^2 x + \sin x$ имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант № 19

Часть 1

В1. Найдите значение выражения $\frac{15^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}}}{20^{\frac{1}{3}}}$.

В2. Найдите значение выражения $\log_5 a$, если $\log_{\frac{1}{25}} a = 6$.

В3. Найдите корень уравнения $3^{3x+4} = \frac{1}{9}$.

В4. Решите уравнение $2 - \log_7(6x - 5) = 0$.

В5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_3(3 - 2x) < 1$.

В6. Найдите наибольшее значение x из области определения функции $y = \sqrt{0,1^{4x-2} - 100}$.

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = 3^{-x} + 4$.

В8. Решите уравнение $\operatorname{ctg}(\pi + x) = 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $3 \cos^2 x - \frac{3}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 2$.

В10. Решите уравнение $\log_2(5 - 2x) = 5^{\frac{2}{\log_2 5}}$.

В11. Вычислите $\sqrt{8 - \sqrt{28}} - \sqrt{8 + \sqrt{28}}$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $\sqrt{2x^2 - 3x + 10} + x = 4$.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 9} \log_2(0,5x) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0?$$

С2. Найдите количество целых чисел, которые не входят в область определения функции $y = \lg(|2x + 4| - |x - 3|)$.

С3. Решите уравнение $16^{\sin^2 x} + 12 = 2^{4 - \cos 2x}$.

С4. Найдите все значения аргумента x , при которых точки графика функции $y = \frac{4^x + 88}{7x - 20}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $y = \frac{19 \cdot 2^x}{7x - 20}$.

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{y + \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$$

С6. При каких значениях параметра m прямая $y = 3m - 2m^2$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \sin^2 x + m \cos x$?

Вариант №20

Часть 1

В1. Найдите значение выражения $\frac{5^{3,2} : 5^{-\frac{7}{5}}}{25^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{3,1}}$.

В2. Найдите значение выражения $\log_4 6 - \log_4 3 + \log_4 8$.

В3. Найдите корень уравнения $2^{2x-4} = \frac{1}{16}$.

В4. Решите уравнение $\log_2 (1 - 2x) = 3$.

В5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\log_{\frac{1}{4}} (1 - 5x) > -2$.

В6. Найдите наибольшее значение x из области определения функции $y = \sqrt{4 - 16^{x+1}}$.

В7. Найдите наименьшее целое значение функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} - 3$.

В8. Решите уравнение $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В9. Упростите выражение $2 \sin^2 x + 3 + 2 \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x$.

В10. Решите уравнение $\log_7 (6x - 5) = 6^{\frac{-2}{\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 6}}$.

В11. Вычислите $\left(13 \sqrt[3]{64 \cdot \sqrt{8}} + 51 \sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{64}}\right)^{-\frac{2}{17}}$.

В12. Найдите корень уравнения или произведение корней уравнения, если их несколько: $x + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5$.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $(1 - 2 \sin^2 x) \log_3 (x - x^2) = 0$?

С2. Найдите количество целых чисел, которые не входят в область определения функции $y = \frac{7}{\sqrt[6]{|4x + 12| - |2x - 11|}}$.

С3. Решите уравнение $(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x$.

С4. Найдите наибольшее целое значение x , при котором точки графика функции $\frac{2 \cdot 3^x + 9 \log_3 x}{18 - 5x}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $\frac{18 + 3^{x-1} \log_3 x^3}{18 - 5x}$.

С5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x - y}{x + y}} = \frac{20}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

С6. Найдите наибольшее целое отрицательное значение параметра a , при котором графики функций $f(x) = \cos^2 x - 4a$ и $g(x) = 4 - 2a \cos x$ не имеют общих точек.

Ответы к тестам

Ответы к заданиям В

№	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
1	7	3	-0,25	27,9	1730,75	8	2	6	1000	1	6	384
2	7	18	0,5	10,5	1037	3	-3	7	0	1	600	1
3	126	4,8	0,74	32	116450	8	9	3	20	3	3	48
4	83	60	16	33	32150	0	2	8	3	-5	50	96
5	23	1	5	12	195 000	7	4	5	4	3	120	12
6	900	12	18	17,5	31 500	9	3	2	3	2	25	144
7	52	2	1,75	6	42250	6	-2	-1	7	-8	27	18
8	30	17	5,25	8	144	6	-4	5	9	-2	6	576
9	7	4	6	15	2284,8	6	2	-36	14	-1	15	16
10	3	3	8	12	360	14	1	-25	9	1	10	1,6
11	1,2	3	4,5	7	1	1	3	120	-19,4	3,25	9	-1
12	2,4	-1	-2	72	2	-1	3	45	1	3	5	3
13	15	-3	1,25	124	7	-1	5	90	-0,5	2,5	16,75	-1
14	0,5	3	1,25	20	1	1,5	4	135	2	3	2	-2
15	5	1	2	7	4	1,5	4	60	0,5	-2	7	3
16	-46	8	-1	9	2	-1	6	120	-5	7	1,5	-2
17	2	18	2,5	-25	4	-2	-2	120	4	5	6	1
18	1	8	2	8	3	1	6	135	5	22	-6	1
19	3	-12	-2	9	1	0	5	45	-2	-5,5	-2	-6
20	5	2	0	-3,5	3	-0,5	-2	270	5	9	0,5	-2

Ответы к заданиям С

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
1	$\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, -2\right), n \in \mathbb{Z};$ $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; 3\right), k \in \mathbb{Z}$	$\pm\sqrt{10}$	$\sqrt{37}$ или $\frac{7}{\sqrt{37}}$	$(1; 7]$	$[-7; 3]$	$-7; -2; -1;$ $0; 1; 3$
2	$\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; 2\right), n \in \mathbb{Z}$	± 4	1,5 или 6,5	$(\log_2 5; +\infty)$	$a < -\frac{73}{8}$	$\frac{11}{3}$
3	$(0; 2\pi k) k \in \mathbb{Z}$	0	8	$\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (1; 2)$	$(0; 2]$	$(1; 4), (1; -4);$ $(-1; 4), (-1; -4)$
4	$(20; 16)$	$6, \frac{1}{6}$	256	$\left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup$ $\cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (6; +\infty)$	$\left(\frac{1}{2}; 1\right)$	$(-1; -3), (-1; 3)$ $(1; -3), (1; 3)$
5	$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	2	8 или 60	$[-7; -\sqrt{35}) \cup [5; \sqrt{35})$	0	53
6	$\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \pi k\right),$ $n, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{4}; 2$	70	$(-\infty; 0] \cup [\log_3 2; 1)$	$(-7; 1)$	852
7	$\left(1; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\right);$ $\left(-\frac{1}{3}; (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right)$	Решений нет	$4\sqrt{2} + 2\sqrt{15};$ или 8	$[4, +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(1452; 132);$ $(14762; 122);$ $(242; 242)$
8	$\left(-1; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ $\left(4; \arctg 4 + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$	1	$4\sqrt{6}$	$\left(2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$	$(-3; +\infty)$	$(2450; 50);$ $(392; 56);$ $(98; 98)$

Ответы к заданиям С (Продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
9	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -2\right),$ $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 6\right);$ $k, n \in Z$	± 2	8π	$x > 9$	$-6 - \sqrt{24} < b < -6 + \sqrt{24}$	$(272; 17), (144; 18),$ $(80; 20), (48; 24)$
10	$(\pi n; 2), (\pi k; 6);$ $n, k \in Z$	1; 3	5 или 13	$x > 11$	$-4 - \sqrt{56} < b < -4 + \sqrt{56}$	$(42; 7), (24; 8),$ $(18; 9), (15; 10)$
11	3	9	$\pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi k,$ $k \in Z$	$(10^{-1}; 10^2) \cup (10^3; 10^5)$	$(3; 1,5), (6; 3)$	$(-2; 2)$
12	4	2	1; 2	44	$(1; 2), (2; 4)$	$(-\infty; 2 - \sqrt{5}) \cup$ $\cup (2 + \sqrt{5}; +\infty)$
13	2	1	$4\pi k, k \in Z$	$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$	$(4; 1)$	$(-\infty; 1) \cup (1; 4 - \sqrt{5}) \cup$ $\cup (4 + \sqrt{5}; +\infty)$
14	3	5	1; 2	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k\right) \cup$ $\cup (2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in Z$	$(-4; 0),$ $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$	2
15	5	4	3	$(2,5; 4) \cup (8,5; +\infty)$	$(2; 1)$	1
16	2	4	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	$\left(\frac{1}{4}; 2\right)$	$(2; 2)$	$(0; 7]$
17	2	3	$-\frac{\pi}{4} + \pi k, \pi k,$ $\arctg 2 + \pi k,$ $k \in Z$	$\left(\frac{1}{3}; 9\right)$	$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \log_3 \sqrt[4]{5}\right)$	$[-1,5; -0,5]$

Ответы к заданиям С (Окончание)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
18	4	5	1	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$	(3; 3)	(0; 4]
19	2	7	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$	$\left(-\infty; \frac{20}{7}\right) \cup [3; \log_2 11]$	(1; 1)	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$
20	1	11	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$	9	(5; 3), (5; -3)	-2

Решение варианта №1

В1. После понижения цены на 7% метр ткани будет стоить
 $1500 - 1500 \cdot 0,07 = 1395$ рубля.

На 10 000 рублей можно будет купить $10\,000 : 1395 \approx 7,17$ метров ткани.
 Целое число, удовлетворяющее условию, — 7 метров.

Ответ: 7.

В2. По графику (см. рис. 21) определяем, что уровень воды в реке был не выше 300 см в течение трёх дней.

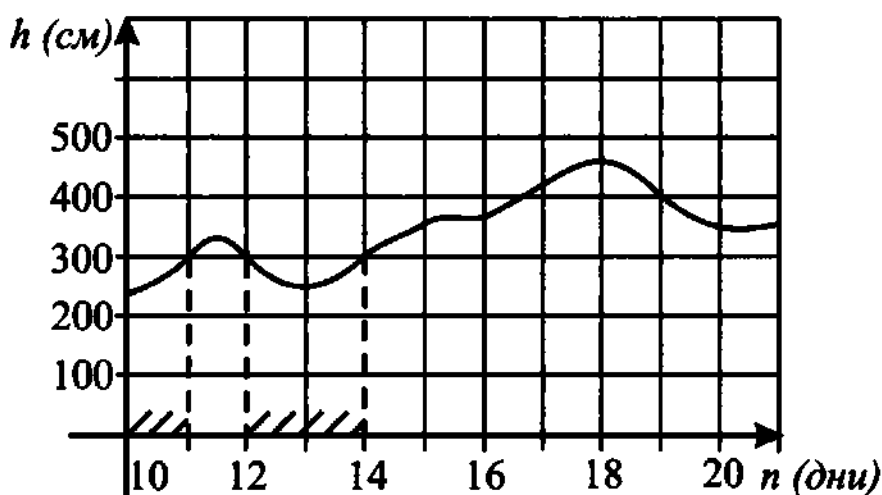


Рис. 21.

Ответ: 3.

$$\begin{aligned} \text{В3. } \log_{\frac{1}{16}} (\log_5 7 \cdot \log_7 25) &= \log_{2^{-4}} \left(\frac{1}{\log_7 5} \cdot 2 \log_7 5 \right) = \log_{2^{-4}} 2 = \\ &= -\frac{1}{4} = -0,25 \end{aligned}$$

Ответ: $-0,25$.

В4. Площадь круга находим по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$.

По рисунку (см. рис. 22) $d = 6$ см, по условию $\pi = 3,1$.

$$S = \frac{3,1 \cdot 6^2}{4} = 27,9 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 27,9.

В5. Условию задачи соответствуют две квартиры: на третьем и пятом этажах. Определим стоимость каждой из них:

$$1) \ 38\,000 \cdot 44 = 1\,672\,000 \text{ (руб.)};$$

$$1\,672\,000 + 1\,672\,000 \cdot 0,10 = 1\,839\,200 \text{ (руб.)} = 1839,2 \text{ (тыс. руб.)}.$$

$$2) \ 35\,000 \cdot 43 = 1\,505\,000 \text{ (руб.)};$$

$$1\,505\,000 + 1\,505\,000 \cdot 0,15 = 1\,730\,750 \text{ (руб.)} = 1730,75 \text{ (тыс. руб.)}.$$

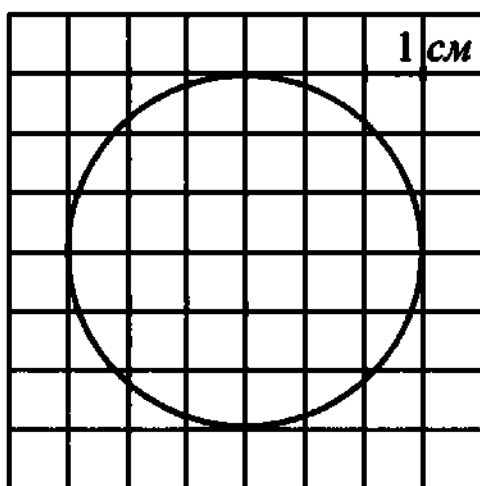


Рис. 22.

За самую дешёвую покупку предполагается заплатить 1730,75 тыс. рублей.

Ответ: 1730,75.

В6. $|2x - 13| \leq 7;$

$-7 \leq 2x - 13 \leq 7;$

$6 \leq 2x \leq 20;$

$3 \leq x \leq 10.$

Промежуток $[3; 10]$ содержит 8 целых чисел, следовательно, исходное неравенство имеет 8 целочисленных решений: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ответ: 8.

В7. Функция $f(t) = \log_3 t$ возрастающая ($3 > 1$), следовательно, принимает наибольшее значение при наибольшем значении аргумента t , $t = 9 \sin x$. Учитывая, что $t > 0$, имеем $0 < 9 \sin x \leq 9$, $t_{\text{наиб.}} = 9$, следовательно, $f_{\text{наиб.}} = f(9) = \log_3 9 = 2$.

Ответ: 2.

В8. $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x-1} + 2.$

Возведём обе части уравнения в квадрат.

$3x + 1 = x - 1 + 4\sqrt{x-1} + 4;$

$2x - 2 = 4\sqrt{x-1};$

$x - 1 = 2\sqrt{x-1}.$

Возведя обе части последнего уравнения в квадрат, получим

$x^2 - 2x + 1 = 4(x - 1);$

$x^2 - 6x + 5 = 0;$

$x_1 = 5$, $x_2 = 1$ — корни уравнения.

Проверка показывает, что каждое из чисел 5 и 1 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 1; 5.

В9. При $T_2 = 300^\circ \text{K}$ КПД двигателя будет не менее 70%, значит,

$$\frac{T_1 - 300}{T_1} \cdot 100\% \geq 70\%,$$

$$(T_1 - 300) \cdot 100 - 70T_1 \geq 0,$$

$$100T_1 - 30000 - 70T_1 \geq 0,$$

$$30T_1 \geq 30000,$$

$$T_1 \geq 1000.$$

КПД двигателя будет не менее 70% при наименьшем значении температуры нагревателя $T_1 = 1000^\circ \text{K}$.

Ответ: 1000.

В10. Обозначим $3x^2 - x = t$. Уравнение примет вид:

$$(t - 3) \cdot t + 2 = 0;$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0;$$

$t_1 = 2$, $t_2 = 1$ — корни уравнения.

Вернёмся к исходной переменной.

$$\begin{aligned} 1) \quad 3x^2 - x = 2, \quad 3x^2 - x - 2 = 0, &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -\frac{2}{3}. \end{cases} \\ 2) \quad 3x^2 - x = 1, \quad 3x^2 - x - 1 = 0, &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}, \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из найденных корней большим является $x = 1$.

Ответ: 1.

В11. Пусть масса второго слитка x кг, тогда первого — $(x + 2)$ кг, а масса сплава — $(2x + 2)$ кг. В первом слитке содержится $(x + 2) \cdot 0,4$ кг серебра, а во втором — $0,1x$ кг, в сплаве — $(2x + 2) \cdot 0,3$ кг.

Составим уравнение:

$$0,1x + (x + 2) \cdot 0,4 = (2x + 2) \cdot 0,3;$$

$$0,5x + 0,8 = 0,6x + 0,6;$$

$$0,1x = 0,2;$$

$$x = 2.$$

Масса полученного сплава равна $2 \cdot 2 + 2 = 6$ (кг).

Ответ: 6.

В12. По условию пирамида правильная (см. рис. 23), значит, $ABCD$ — квадрат, PO — высота.

$$1) \quad S_{ABCD} = AB^2 = 12^2 = 144 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$2) \quad S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot PF, \text{ где } PF \text{ — апофема.}$$

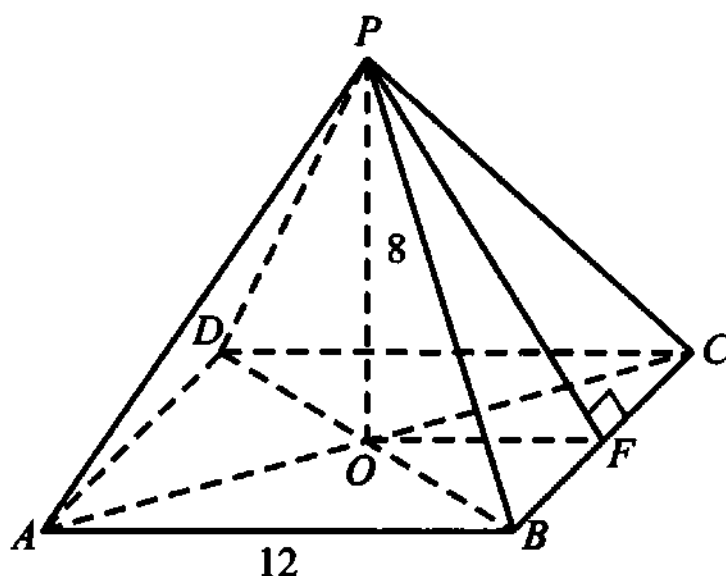


Рис. 23.

3) В $\triangle ABC$ OF — средняя линия, $OF = \frac{1}{2}AB = 6$ (см).

4) В $\triangle POF$ по теореме Пифагора имеем $PF^2 = PO^2 + OF^2$,
 $PF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см);

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 \cdot 10 = 240 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}} = 240 \text{ см}^2 + 144 \text{ см}^2 = 384 \text{ см}^2.$$

Ответ: 384.

С1. Решим уравнение $\cos^2 x - \cos x - 0,75 = 0$.

Обозначим $\cos x = t$, $|t| \leq 1$.

$$t^2 - t - 0,75 = 0;$$

$$D = 1 + 3 = 4 = 2^2;$$

$$t_1 = \frac{1+2}{2} = 1,5, \text{ не удовлетворяет условию } |t| \leq 1;$$

$$t_2 = \frac{1-2}{2} = -0,5.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \text{ (см. рис. 24).}$$

Из уравнения $\sin x = -0,5\sqrt{y^2 - y - 3}$ следует, что $\sin x \leq 0$. Поэтому, $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ и $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Получим

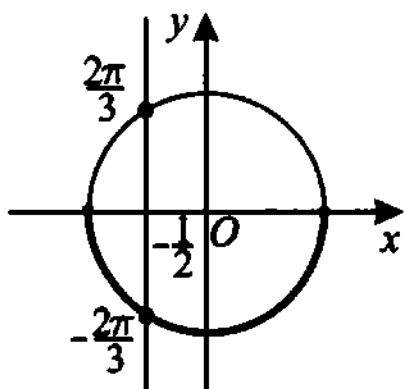


Рис. 24.

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -0,5\sqrt{y^2 - y - 3}, \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -2\right), \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 3\right), n \in \mathbb{Z}.$

$$\text{С2. } \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5(x^2-9)} = \left(\frac{1}{5}\right)^0;$$

$$\log_5(x^2 - 9) = 0.$$

По определению логарифма имеем

$$x^2 - 9 = 5^0;$$

$$x^2 - 9 = 1;$$

$$x^2 = 10; \begin{cases} x = \sqrt{10}, \\ x = -\sqrt{10}. \end{cases}$$

Ответ: $\pm\sqrt{10}.$

С3. По теореме синусов $\frac{MP}{\sin \angle N} = 2R$, где R — радиус описанной окружности (см. рис. 25).

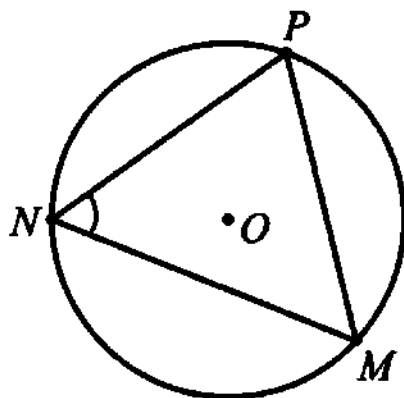


Рис. 25.

$$\frac{MP}{\sin \angle N} = \frac{2\sqrt{111}}{3}, \quad MP = \frac{2\sqrt{111}}{3} \cdot \sin \angle N.$$

По теореме косинусов $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN \cdot NP \cdot \cos \angle N$,
 $MP^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \angle N$,
 $MP^2 = 25 - 24 \cos \angle N$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} MP = \frac{2\sqrt{111}}{3} \cdot \sin \angle N, & (1) \\ MP^2 = 25 - 24 \cos \angle N. & (2) \end{cases}$$

Из первого уравнения получим

$$MP^2 = \frac{4 \cdot 111}{9} \cdot \sin^2 \angle N = \frac{148}{3} \cdot (1 - \cos^2 \angle N) = \frac{148}{3} - \frac{148}{3} \cos^2 \angle N.$$

Подставим $MP^2 = \frac{148}{3} - \frac{148}{3} \cos^2 \angle N$ во второе уравнение:

$$\frac{148}{3} - \frac{148}{3} \cos^2 \angle N = 25 - 24 \cos \angle N;$$

$$148 - 148 \cos^2 \angle N = 75 - 72 \cos \angle N;$$

$$148 \cos^2 \angle N - 72 \cos \angle N - 73 = 0.$$

Обозначим $\cos \angle N = t$, $|t| \leq 1$.

$$148t^2 - 72t - 73 = 0;$$

$$D = 5184 + 43216 = 48400 = 220^2.$$

$$t_1 = \frac{72 + 220}{148 \cdot 2} = \frac{292}{296} = \frac{73}{74};$$

$$t_2 = \frac{72 - 220}{148 \cdot 2} = -\frac{148}{148 \cdot 2} = -\frac{1}{2}.$$

Числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{73}{74}$ удовлетворяют условию $|t| \leq 1$.

$$1) \cos \angle N = \frac{73}{74},$$

$$MP = \sqrt{\frac{148}{3} \cdot \left(1 - \frac{73^2}{74^2}\right)} = \sqrt{\frac{148}{3} \cdot \left(1 - \frac{73}{74}\right) \left(1 + \frac{73}{74}\right)} = \sqrt{\frac{49}{37}} = \frac{7}{\sqrt{37}}.$$

$$2) \cos \angle N = -\frac{1}{2},$$

$$MP = \sqrt{\frac{148}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \sqrt{\frac{148}{4}} = \sqrt{37}.$$

Ответ: $\frac{7}{\sqrt{37}}, \sqrt{37}$.

$$\text{C4. } \log_5((x+7)(x-1)) \leq \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{5^3}} 6 + \log_5(x+7); \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+7)(x-1) > 0, \\ x+7 > 0, \\ \log_5((x+7)(x-1)) - \log_5(x+7) \leq \log_5 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ \log_5(x+7) + \log_5(x-1) - \log_5(x+7) \leq \log_5 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \log_5(x-1) \leq \log_5 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ x-1 \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \leq 7; \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 7.$$

Ответ: $(1; 7]$.

$$\text{C5. } -5 \leq \frac{1-bt+t^2}{1+t+t^2} \leq 5;$$

$$-5 \leq 1 - \frac{(b+1) \cdot t}{1+t+t^2} \leq 5;$$

$$-6 \leq -\frac{(b+1) \cdot t}{1+t+t^2} \leq 4;$$

$$-4 \leq \frac{(b+1) \cdot t}{t^2+t+1} \leq 6.$$

$$\begin{cases} \frac{(b+1)t}{t^2+t+1} \geq -4, \\ \frac{(b+1)t}{t^2+t+1} \leq 6. \end{cases}$$

Умножим обе части каждого неравенства системы на $t^2 + t + 1$, учитывая, что $t^2 + t + 1 > 0$ при любом значении t . Получим:

$$\begin{cases} (b+1)t \geq -4t^2 - 4t - 4, \\ (b+1)t \leq 6t^2 + 6t + 6; \\ 4t^2 + (b+5)t + 4 \geq 0, \\ 6t^2 - (b-5)t + 6 \geq 0. \end{cases}$$

Старший коэффициент квадратных трёхчленов каждого неравенства положителен, значит, неравенства выполняются для любого t при условии, что дискриминанты трёхчленов $4t^2 + (b+5)t + 4$ и $6t^2 - (b-5)t + 6$ неположительные. Задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} (b+5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 \leq 0, \\ (b-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 10b - 39 \leq 0, \\ b^2 - 10b - 119 \leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -13 \leq b \leq 3, \\ -7 \leq b \leq 17; \end{cases} \quad -7 \leq b \leq 3.$$

Ответ: $[-7; 3]$.

С6. Представим c в виде суммы многочлена и дроби, числитель которой — многочлен первой степени.

$$c = \frac{(n^9 + n^7) - (n^7 + n^5) + (n^5 + n^3) - (n^3 + n) + n + 7}{n^2 + 1} =$$

$$= n^7 - n^5 + n^3 - n + \frac{n + 7}{n^2 + 1}.$$

Так как $n^7 - n^5 + n^3 - n$ — целое число, то c — целое число тогда и только тогда, когда дробь $\frac{n + 7}{n^2 + 1}$ — целое число.

Этому условию удовлетворяет значение $n = -7$, при котором числитель $n + 7 = 0$, и некоторые целые n , при которых $|n + 7| \geq n^2 + 1$, $-2 \leq n \leq 3$. Из промежутка $[-2; 3]$ выберем возможные целые значения n :

$$n = -2, \quad \frac{-2 + 7}{2^2 + 1} = 1 \text{ — удовлетворяет;}$$

$$n = -1, \quad \frac{-1 + 7}{1 + 1} = 3 \text{ — удовлетворяет;}$$

$$n = 0, \quad \frac{0 + 7}{0 + 1} = 7 \text{ — удовлетворяет;}$$

$$n = 1, \quad \frac{1 + 7}{1 + 1} = 4 \text{ — удовлетворяет;}$$

$$n = 2, \quad \frac{2 + 7}{2^2 + 1} = \frac{9}{5} \text{ — не удовлетворяет;}$$

$$n = 3, \quad \frac{3 + 7}{3^2 + 1} = 1 \text{ — удовлетворяет.}$$

Ответ: $0; \pm 1; -2; 3; -7$.

Решение варианта №11

$$\text{В1. } \frac{(2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (3^4)^{\frac{1}{3}}}{(5^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \cdot 3^{\frac{4}{3}}}{5 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

Ответ: 1,2.

$$\text{В2. } \log_6 12^2 + 2 \log_6 2^{-1} + 1 = 2 \log_6 2 + 2 \log_6 6 - 2 \log_6 2 + 1 = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: 3.

$$\text{В3. } \left(\frac{1}{49}\right)^{3-x} = 343, (7^{-2})^{3-x} = 7^3, 7^{2x-6} = 7^3,$$

$$2x - 6 = 3, 2x = 9, x = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

$$\text{В4. } \log_3(x+2) = 2. \text{ По определению логарифма имеем } x+2 = 3^2, \\ x+2 = 9, x = 7.$$

Ответ: 7.

$$\text{В5. } \log_2(5x-2) \leq 2, \log_2(5x-2) \leq \log_2 4, \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x-2 > 0, \\ 5x-2 \leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,4, \\ 5x \leq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,4, \\ x \leq 1,2; \end{cases} \Leftrightarrow 0,4 < x \leq 1,2.$$

Следовательно, исходное неравенство имеет одно целочисленное решение $x = 1$.

Ответ: 1.

$$\text{В6. Область определения функции } \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - \frac{1}{27} \geq 0, \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

Так как функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ убывающая, то $x+2 \leq 3, x \leq 1$. Следовательно, $x = 1$ — наибольшее значение x из области определения заданной функции.

Ответ: 1.

$$\text{В7. } 4^{-x} > 0, 4^{-x} + 2 > 2, \text{ все промежуточные значения достигаются.} \\ \text{Наименьшее целое значение функции } y = 4^{-x} + 2 \text{ равно 3.}$$

Ответ: 3.

$$\text{В8. } \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [0; \pi].$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

Промежутку $[0; \pi]$ принадлежит единственный корень уравнения $x = \frac{2\pi}{3}$,

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ \text{ (см. рис. 26).}$$

Ответ: 120.

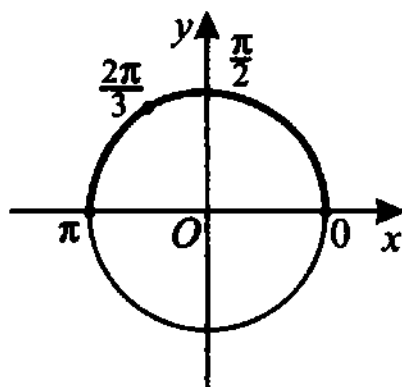


Рис. 26.

В9. Так как $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, то исходное выражение равно

$$3 \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha - 22,4 = 3 - 22,4 = -19,4.$$

Ответ: $-19,4$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B10.} \quad & \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^{2 \log_{\frac{1}{7}}(2x-3)} = 5x - 4, \\ 2x - 3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 3)^2 = 5x - 4, \\ x > 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} 4x^2 - 12x + 9 - 5x + 4 = 0, \\ x > 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 17x + 13 = 0, \\ x > 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{13}{4}, \end{cases} \\ x > 1,5; \end{cases} \Leftrightarrow x = 3,25. \end{aligned}$$

Ответ: $3,25$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B11.} \quad & \left(1,2 \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} + 1,8 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{12}{11}} = \left(1,2 \cdot 3^{\frac{5}{6}} + 1,8 \cdot 3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{12}{11}} = \left(3 \cdot 3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{12}{11}} = \\ & = \left(3^{\frac{11}{6}}\right)^{\frac{12}{11}} = 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Ответ: 9 .

$$\begin{aligned} \mathbf{B12.} \quad & \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 8x + 7} = x + 2, \\ x + 2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 8x + 7 = x^2 + 4x + 4, \\ x \geq -2; \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0, \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -3, \end{cases} \\ x \geq -2; \end{cases} \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Ответ: -1 .

$$C1. 1. \begin{cases} \cos x - \sin x = 0, \\ 5 - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x, \\ x^2 < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ |x| < \sqrt{5}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x = \frac{\pi}{4}$.

$$2. \log_3(5 - x^2) = 0.$$

По определению логарифма имеем $5 - x^2 = 1$, $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.
Следовательно, исходное уравнение имеет три корня.

Ответ: 3.

C2. Учитывая, что логарифм определён на множестве положительных чисел, задача сводится к решению неравенства

$$|3x + 7| - |x - 9| \leq 0, \quad |3x + 7| \leq |x - 9|.$$

Так как $|3x + 7| \geq 0$ и $|x - 9| \geq 0$, возведём обе части неравенства в квадрат:

$$\begin{aligned} (3x + 7)^2 &\leq (x - 9)^2, \\ (3x + 7)^2 - (x - 9)^2 &\leq 0, \\ (3x + 7 - x + 9)(3x + 7 + x - 9) &\leq 0, \\ (2x + 16)(4x - 2) &\leq 0, \\ (x + 8)(2x - 1) &\leq 0, \end{aligned}$$

$$-8 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Промежуток $\left[-8; \frac{1}{2}\right]$ содержит 9 целых чисел:

$$-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0.$$

Ответ: 9.

$$C3. \begin{cases} 5 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 \sin^2 x = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 - 2 \cos^2 x = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos x = \frac{2}{3}, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \right.$$

Так как первая система решений не имеет, то из второй системы получаем

$$x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

C4. $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} > 1,$

$$\frac{1 + \lg x + 10 - 2\lg x - (5 + 5\lg x - \lg x - \lg^2 x)}{(5 - \lg x)(1 + \lg x)} > 0,$$

$$\frac{\lg^2 x - 5\lg x + 6}{(5 - \lg x)(1 + \lg x)} > 0,$$

$$\frac{(\lg x - 2)(\lg x - 3)}{(5 - \lg x)(1 + \lg x)} > 0.$$

Обозначим $\lg x = t$.

Неравенство примет вид $\frac{(t - 2)(t - 3)}{(t - 5)(t + 1)} < 0.$

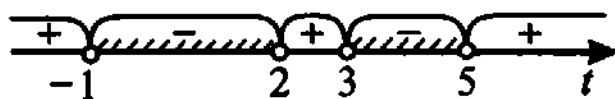


Рис. 27.

$$-1 < t < 2, 3 < t < 5.$$

Вернёмся к исходной переменной.

1. $-1 < \lg x < 2, 10^{-1} < 10^{\lg x} < 10^2, 10^{-1} < x < 10^2.$

2. $3 < \lg x < 5, 10^3 < 10^{\lg x} < 10^5, 10^3 < x < 10^5.$

Ответ: $(0,1;100) \cup (1000;100\,000).$

C5. 1. Из второго уравнения системы выразим x через y .

Обозначим $\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} = t, \sqrt{\frac{2x}{3x - 2y}} = \frac{1}{t}, t > 0.$

Уравнение примет вид

$$t + \frac{1}{t} = 2, t^2 - 2t + 1 = 0, (t - 1)^2 = 0, t = 1.$$

Вернёмся к исходным переменным:

$$\frac{3x - 2y}{2x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x - 2y}{2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

2. Подставим $x = 2y$ в первое уравнение. Получим:

$$(2y)^2 - 18 = 2y \cdot (4y - 9),$$

$$4y^2 - 18 - 8y^2 + 18y = 0,$$

$$-4y^2 + 18y - 18 = 0,$$

$$2y^2 - 9y + 9 = 0.$$

Корни уравнения: $y_1 = 3$, $y_2 = 1,5$.

Решениями исходной системы являются $(6; 3)$ и $(3; 1,5)$.

Ответ: $(6; 3)$, $(3; 1,5)$.

С6. Данная система не имеет решений, если уравнение

$4 - 2m \sin x = m \cos^2 x + 2 \sin x - m$ (1) не имеет решений.

Найдём, при каких значениях m уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

$$4 - 2m \sin x = m(1 - \sin^2 x) + 2 \sin x - m,$$

$$m \sin^2 x - 2m \sin x - 2 \sin x + m + 4 - m = 0,$$

$$m \sin^2 x - 2(m + 1) \sin x + 4 = 0.$$

Обозначим $\sin x = t$, $|t| \leq 1$.

Уравнение примет вид $mt^2 - 2(m + 1)t + 4 = 0$. Рассмотрим два случая.

1. $m = 0$, $-2t + 4 = 0$, $t = 2$, не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

$$2. \ m \neq 0, \ t_{1,2} = \frac{m + 1 \pm \sqrt{m^2 + 2m + 1 - 4m}}{m} = \frac{m + 1 \pm \sqrt{(m - 1)^2}}{m},$$

$$t_1 = \frac{m + 1 + m - 1}{m} = 2 \text{ не удовлетворяет условию } |t| \leq 1,$$

$$t_2 = \frac{m + 1 - m + 1}{m} = \frac{2}{m}.$$

Учитывая, что $|t| \leq 1$, имеем $\left| \frac{2}{m} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 2 \Leftrightarrow$

$$m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

Следовательно, исходное уравнение не имеет решений при $m \in (-2; 2)$.

Ответ: $(-2; 2)$.

Часть II. Учебно-тренировочные тесты (без логарифмов)

План итоговой работы по спецификации ЕГЭ

Варианты 1–10

№ п/н	Обозначение задания	Проверяемые умения	Коды проверяемых элементов содер- жания и элементы содержания	Уровень сложности	Макс. балл	Время выполнения
1	2	3	4	5	6	7
1	В1	Уметь решать тексто- вые задачи, используя приобретённые зна- ния в практической ситуации	1.1.1. Целые числа. 1.1.3. Дроби, про- центы, рациональ- ные числа.	Б	1	5
2	В2	Уметь описывать зависимость между величинами и ин- терпретировать их графики; извлекать информацию, пред- ставленную в табли- цах, на диаграммах, графиках	6.2.1. Табличное и графическое пред- ставление данных. 3.1. Определение и график функции. 3.2. Элементарное исследование функций. 3.3. Основные элементарные функции.	Б	1	3
3	В3	Уметь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений	1.2. Основы тригонометрии.	Б	1	3
4	В4	Уметь исследовать построенные модели с использованием геометрических поня- тий и теорем; находить геометрические вели- чины	5.1. Планиметрия. 5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.	Б	1	3

1	2	3	4	5	6	7
5	B5	Уметь решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического содержания	2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. 2.1.12. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.	Б	1	5
6	B6	Уметь решать уравнения и неравенства, содержащие неизвестные под знаком модуля	1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа.	Б	1	5
7	B7	Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения	2.1.4. Тригонометрические уравнения.	Б	1	3
8	B8	Уметь применять геометрический смысл производной	4.1.3. Уравнение касательной к графику функции.	Б	1	5
9	B9	Уметь применять физический смысл производной	4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.	Б	1	5
10	B10	Уметь находить наибольшее и наименьшее значения функции	4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.	Б	1	7
11	B11	Уметь решать содержательные задачи из различных областей науки и практики	2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.	Б	1	7

1	2	3	4	5	6	7
12	В12	Уметь решать стереометрические задачи на нахождение геометрических величин	5.2. Прямые и плоскости в пространстве. 5.3. Многогранники.	Б	1	5
13	С1	Уметь решать тригонометрические уравнения	2.1.4. Тригонометрические уравнения.	П	2	10
14	С2	Уметь находить множество значений функции	3.1.2. Множество значений функции.	П	2	10
15	С3	Уметь решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин	5.1. Планиметрия.	П	3	15
16	С4	Уметь описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами	4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.	П	3	12
17	С5	Уметь решать уравнения и неравенства, содержащие параметр	2.2.1. Квадратные неравенства. 2.2.2. Рациональные неравенства. 2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств. 2.2.9. Метод интервалов. 2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.	В	4	15
18	С6	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	1.1. Целые числа. 1.4. Преобразование выражений.	В	4	20

План итоговой работы по дидактическим линиям

Варианты 11–20

№ п/п	Обозначение задания	Проверяемые умения	Коды проверяемых эле- ментов содержания и элементы содержания	Уровень сложности	Макс. балл	Время выполнения
1	2	3	4	5	6	7
1	В1	Владеть поняти- ями синуса, ко- синуса, тангенса, котангенса чис- лового аргумента; применять основное триго- нометрическое тождество	1.2.3. Понятия синуса, косинуса, тангенса, ко- тангенса числового ар- гумента. 1.2.4. Основное тригонометрическое тождество: упрощать выражение; находить значение выражения.	Б	1	3
2	В2	Уметь решать простейшие три- гонометрические уравнения	2.1.4. Решение триго- нометрических уравне- ний. Общая формула решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.	Б	1	3
3	В3	Уметь находить множество зна- чений триго- нометрической функции	3.1.2. Множество зна- чений тригонометриче- ской функции.	Б	1	3
4	В4	Уметь решать уравнение $f'(x) = a$	4.1. Производная сложных функций: находить, вычислять значение производной в точке аргумента при определённом значении функции.	Б	1	3

1	2	3	4	5	6	7
5	B5	Уметь выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений, используя соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента	1.4.4. Зависимость между тангенсом и косинусом одного и того же аргумента. Зависимость между котангенсом и синусом одного и того же аргумента. Другие комбинации соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента: упрощать выражение; находить значение выражения.	Б	1	4
6	B6	Уметь решать тригонометрические уравнения	2.1.4. Использование нескольких приёмов при решении тригонометрических уравнений.	Б	1	4
7	B7	Уметь применять геометрический смысл производной	4.1.1. Геометрический смысл производной: находить угловой коэффициент касательной, тангенс угла наклона касательной, угол наклона касательной, угол наклона касательной по графику производной.	Б	1	4
8	B8	Уметь находить значение тригонометрических выражений	1.4.4. Тождественные преобразования тригонометрических выражений: упрощать выражение, находить значение выражения.	Б	1	6
9	B9	Владеть физическим смыслом производной	4.1.2. Физический смысл производной.	Б	1	6
10	B10	Уметь находить промежутки монотонности функции, точки экстремума, экстремум	3.2.1. Промежутки монотонности функции: находить аналитически. 3.2.5. Экстремумы функции: находить аналитически.	Б	1	11

1	2	3	4	5	6	7
11	В11	Уметь исследовать функцию с помощью производной (по графику производной)	4.1.1. Промежутки монотонности: находить по графику производной. Точки экстремумов функции: находить по графику производной. Точки, в которых функция достигает наибольшего и наименьшего значения: находить по графику производной.	Б	1	10
12	В12	Уметь находить период функции	3.3.5. Периодичность функции: синуса, косинуса, тангенса, котангенса.	Б	1	10
13	С1	Уметь решать комбинированные уравнения	3.1.1. Область определения функции. 2.1.3. Решение иррациональных уравнений. 2.1.4. Решение тригонометрических уравнений: решать, решать и отбирать корни по заданному условию.	П	2	11
14	С2	Уметь исследовать функцию с помощью производной	4.2.1. Исследование функций с помощью производной.	П	2	13
15	С3	Уметь решать тригонометрические уравнения	2.1.4. Использование нескольких приёмов при решении тригонометрических уравнений.	П	3	15
16	С4	Уметь находить множество значений сложной функции	3.3.5. Множество значений тригонометрической функции.	П	3	15

1	2	3	4	5	6	7
17	C5	Уметь составлять и исследовать математическую модель практической задачи, связанной с нахождением наибольшего (наименьшего) значения функции	4.2.2. Решение тестовых задач на нахождение наибольшего (наименьшего) значения величины с помощью производной.	В	4	15
18	C6	Уметь решать уравнения с параметрами	2.1. Уравнения с параметрами: решать, решать и отбирать корни по заданному условию.	В	4	20

Инструкция по выполнению работы.

На выполнение работы отводится 3 часа. Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий базового уровня (В1–В12) по материалу курса математики. К каждому заданию нужно дать краткий ответ, представленный либо целым числом, либо конечной десятичной дробью. Ориентировочное время выполнения части 1 — 30 минут.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (С1 – С6). При их выполнении надо записать подробное обоснованное решение и ответ. Ориентировочное время выполнения части 2 — 120 минут.

Исправления и зачёркивания в каждой части теста, если они сделаны аккуратно, не являются поводом для снижения оценки.

За выполнение каждого задания учащийся получает определённое число баллов.

Таблица максимального числа баллов за одно задание

Часть 1	Часть 2			Σ
Задания, №	Задания, №			
1-12	1-2	3-4	5-6	
1	2	3	4	30

Таблица перевода тестовых баллов в школьные оценки

Тестовый балл	Школьная оценка
0 — 6	2
7 — 12	3
13 — 17	4
18 — 30	5

При выполнении работы советуем не торопиться, проверять полученный ответ, творчески подходить к решению каждого задания.

Желаем успеха!

Вариант №1

Часть 1

В1. Какое наибольшее число тетрадей можно купить на 700 рублей, если тетрадь стоила 20 рублей и цена повысилась на 20%?

В2. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. На оси абсцисс отчается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха (в градусах Цельсия) 5 марта (см. рис. 28).

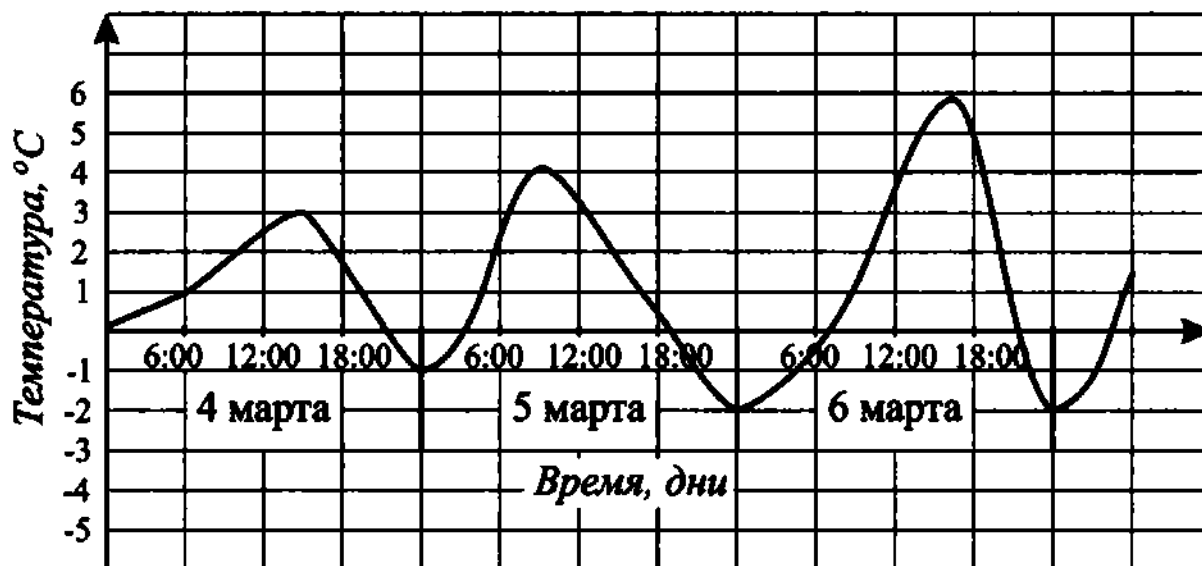


Рис. 28.

В3. Найдите значение выражения $3 \cos^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x + 3 \sin^2 x$.

В4. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 29). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

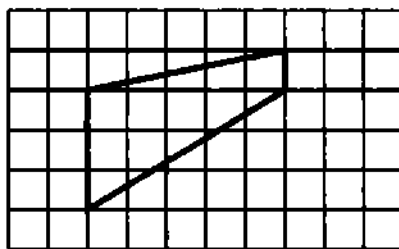


Рис. 29.

В5. Фирма планирует купить 60 кг краски у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость 1 кг краски (в рублях)	Стоимость доставки (в рублях)	Дополнительные условия доставки
1	280	12 000	
2	320	10 000	При заказе товара на сумму свыше 20 000 рублей доставка бесплатно
3	350	10 000	При заказе товара на сумму свыше 20 000 рублей доставка бесплатно

В6. Решите неравенство $|2x + 1| \geq |3x - 1|$. В ответе запишите количество целых чисел, входящих в это решение.

В7. Решите уравнение $2 \cos 2x = \sqrt{2}$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В8. На рисунке 30 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 2. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 2$.

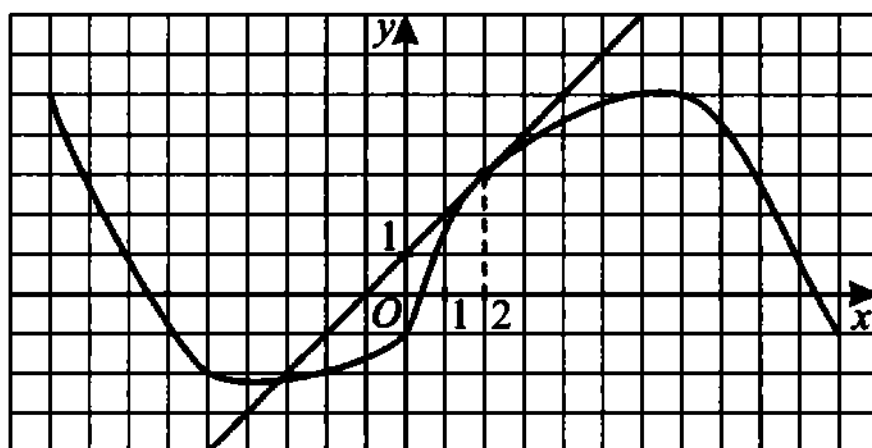


Рис. 30.

В9. Тело движется по закону $s(t) = -4t^2 + 25t$ (s — расстояние в метрах, пройденное телом с момента $t = 0$, t — время в секундах). Найдите, какой путь (в метрах) прошло тело с момента $t = 0$ до момента, когда его скорость составила 1 м/с.

В10. Найдите точку минимума функции $y = (x + 2)e^{2x}$.

В11. Сколько граммов чистого цинка надо добавить к 400 г сплава цинка и железа, содержащего 40% железа, чтобы получился сплав, содержащий 80% цинка?

В12. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания $2\sqrt{3}$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Определите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B_1, A, C .

Часть 2

С1. Решите уравнение $\sin 2x + \cos x - \sin x = 1$.

С2. Найдите множество значений функции $y = (x + 8)e^{4x}$.

С3. В трапеции $ABCD$ биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке T . Найдите площадь трапеции, если $AB = 2$, $AD = 8$, $AT = 1,92$, $BC = 5$.

С4. Определите наименьшее значение периметра прямоугольного треугольника, если его площадь равна 24.

С5. При каких значениях a уравнение $(a + 1 - |x - 1|)(a + x^2 - 2x) = 0$ имеет ровно три корня?

С6. Если к натуральному числу a приписать справа запятую и затем некоторый бесконечный набор цифр, то получится десятичная запись такого иррационального числа c , что $(5c - 6)^2 = 6a^2 - 60c + 168$. Найдите все возможные значения числа c .

Вариант №2

Часть 1

В1. Во время перерыва каждый из 24-х студентов группы купил чай стоимостью 13 рублей, а треть студентов дополнительно купила пирожок стоимостью 15 рублей. Сколько всего рублей потратила группа во время обеденного перерыва?

В2. На графике (см. рис. 31) показано изменение массы сахара, имеющегося в офисе, в зависимости от времени. Сколько дней в офисе находилось больше 0,5 кг сахара?

В3. Упростите выражение $4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 + \sin^2 2x + \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 1)$.

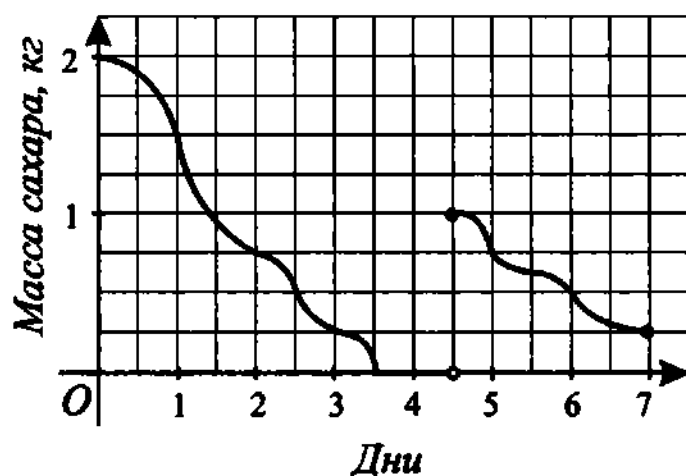


Рис. 31.

В4. Найдите площадь фигуры, изображённой на клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см (см. рис. 32). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

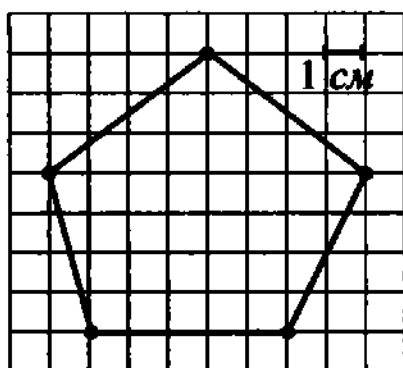


Рис. 32.

В5. Пассажиру предлагают на выбор три такси. В первом он должен заплатить 150 рублей и дополнительно по 20 рублей за каждый километр. Во втором — 260 рублей и дополнительно по 10 рублей за каждый километр. В третьем — 400 рублей за преодоление расстояния не более 15 км и по 10 рублей за каждый дополнительный километр. Какую сумму придётся заплатить пассажиру при наиболее выгодном выборе такси, если ему необходимо проехать 20 км? Ответ дайте в рублях.

В6. Решите неравенство $|x + 1| > |2x - 3| - 2$. В ответе укажите количество целочисленных решений.

В7. Решите уравнение $\cos^2 \pi x = 1$ на промежутке $[\sqrt{13}; \sqrt{23}]$. Если корней несколько, в ответе запишите их сумму.

В8. На рисунке 33 изображён график производной функции $y = f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ наклонена к положительному направлению оси абсцисс под углом 135° .

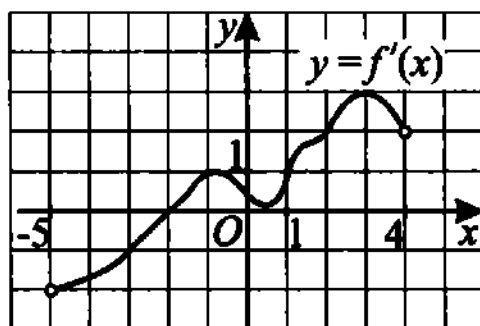


Рис. 33.

В9. Тело начинает движение и 10 секунд движется по закону $x(t) = 2t^2 - 3t$. В какой момент времени его скорость будет равна 6?

В10. Найдите наибольшее значение функции $y = -\cos \pi x - \pi|x|$ на отрезке $[-1; 1]$.

В11. Покупатель пришёл в магазин, имея с собой 1000 рублей и сделал три покупки. На вторую покупку он потратил в 3 раза меньше денег, чем на первую, а на третью в два раза больше, чем на две предыдущие. После этого у него осталось 460 рублей. Сколько рублей потратил покупатель на вторую покупку?

В12. В основании наклонной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $AB = 5$. Боковые рёбра призмы равны 2 и наклонены под углом 30° к плоскости основания. Найдите объём призмы.

Часть 2

С1. Решите уравнение $\frac{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x} = 1$.

С2. Найдите множество значений функции $y = 5 \sin x - 2 \cos 2x$.

С3. В прямоугольном треугольнике ABC на стороне $BC = 4$ как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке M . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника BMC равна $\frac{48}{13}$.

С4. Найдите наибольший возможный объём правильной четырёхугольной пирамиды, у которой сторона основания a и высота h удовлетворяют условию $a + h = 6$.

С5. При каждом значении a решите уравнение $\sqrt{2x + 3} = x - 2a$.

С6. Решите в целых числах уравнение $3x^2 + 5xy - 2y^2 = 17$.

Вариант №3

Часть 1

В1. Насте задали выучить несколько английских слов. Сначала девочка выучила 20 слов, что составило $\frac{1}{2}$ часть от всех слов. Затем она выучила ещё 10 слов. Сколько процентов от общего числа слов Насте осталось выучить?

В2. Из пункта A в пункт B (см. рис. 34) необходимо доставить груз, затратив наименьшее количество бензина. На рисунке 34 показано количество бензина, которое в среднем расходуется на каждом участке пути от пункта A до пункта B . Определите наименьшее количество бензина, которое можно затратить при перевозке груза из пункта A в пункт B .

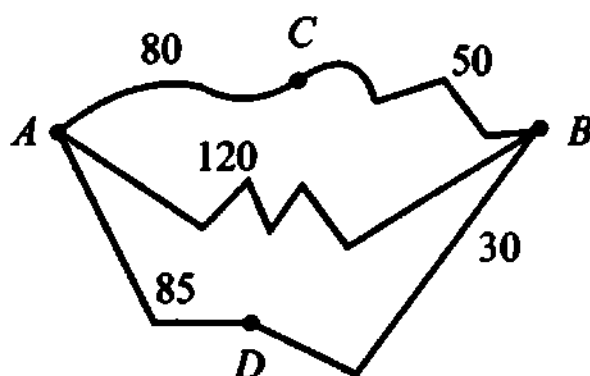


Рис. 34.

В3. Найдите значение выражения $\sqrt{2} \sin 75^\circ - \sqrt{2} \sin 15^\circ$.

В4. На клетчатой бумаге размером 1 см \times 1 см изображена трапеция (см. рис. 35). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах.

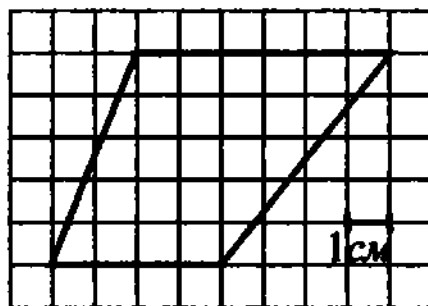


Рис. 35.

В5. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Повременный	150 руб.	30 копеек
2. Комбинированный	280 руб. за 600 мин. разговора в месяц	Свыше 600 мин — 25 копеек за каждую минуту
3. Безлимитный	400 руб.	0 копеек

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров у него составляет 800 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце у него составила 780 минут? Ответ запишите в рублях.

В6. Решите уравнение $|5x - 4| = 2$. Если корней несколько, то в ответе запишите их сумму.

В7. Определите количество корней уравнения $\sin 2x = \sqrt{2} \cos x$ на промежутке $[0; 2\pi)$.

В8. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-8; 4]$. На рисунке 36 изображён график её производной $y = f'(x)$. Найдите точку максимума этой функции на отрезке $[-5; 3]$.

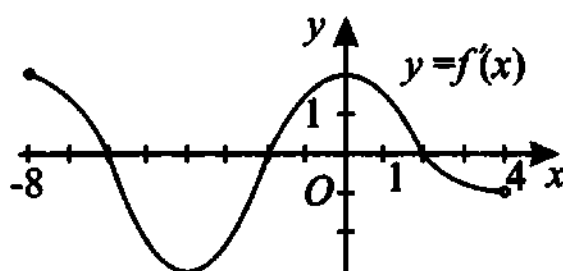


Рис. 36.

В9. На рисунке 37 изображён график скорости прямолинейно движущейся точки. Пользуясь этим графиком, определите ускорение a ($a = v'(t)$) этой точки в момент времени $t = 2$ с. Ответ дайте в м/с^2 .

В10. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{2} \sin x - 2$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$.

В11. Первая труба пропускает в минуту на 2 литра воды больше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, ес-

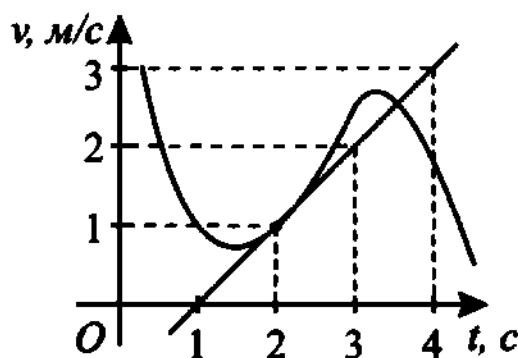


Рис. 37.

ли резервуар объёмом 240 литров она заполнит на 5 минут быстрее, чем вторая труба заполнит резервуар объёмом 280 литров?

В12. Площадь одной грани куба равна 12. Найдите его диагональ.

Часть 2

С1. Решите уравнение $\frac{2}{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

С2. Найдите множество значений функции $y = \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}$.

С3. Серединный перпендикуляр к гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC пересекает катет AC в точке M , продолжение катета BC в точке N , AB в точке P . Найдите AB , если $MP = 4$, $MN = 5$.

С4. Чему должна быть равна глубина бассейна с круглым дном, чтобы на облицовку его внутренних стен и дна пошло наименьшее количество материала, если известно, что объём бассейна равен 343π ?

С5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\frac{x + 6 - (2a - 1)\sqrt{x + 4} + 2a}{3 - 2a + \cos \sqrt{x + 4}} \leq 0$ не имеет решений.

С6. Найдите число k , которое делится на 2 и на 25 и имеет ровно 6 делителей (включая 1 и k).

Вариант №4

Часть 1

В1. Вова купил плеер со скидкой 15% от первоначальной его стоимости, заплатив 1445 рублей. На следующий день скидку увеличили до 20% от первоначальной стоимости. Сколько рублей сэкономил бы Вова, купив плеер на день позже?

В2. На графике (см. рис. 38) показана средняя скорость движения автомобилей по автомагистрали от 0-го до 100-го км. Аварийно-опасными считаются те участки магистрали, где средняя скорость автомобилей более 120 км/ч. Определите по графику, сколько километров на представленном участке автомагистрали аварийно-опасны.

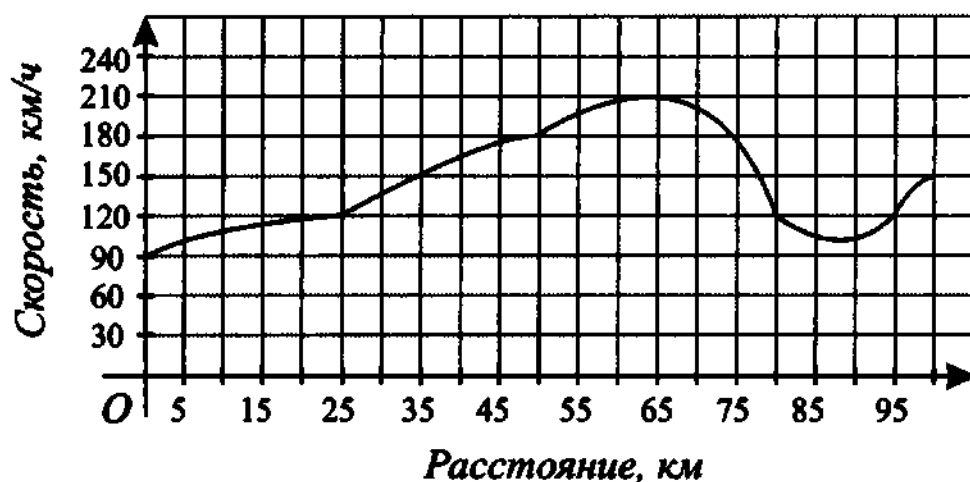


Рис. 38.

В3. Найдите значение выражения $\sin^2 25^\circ + \sin^2 65^\circ$.

В4. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображена трапеция (см. рис. 39). Найдите её площадь в квадратных сантиметрах,

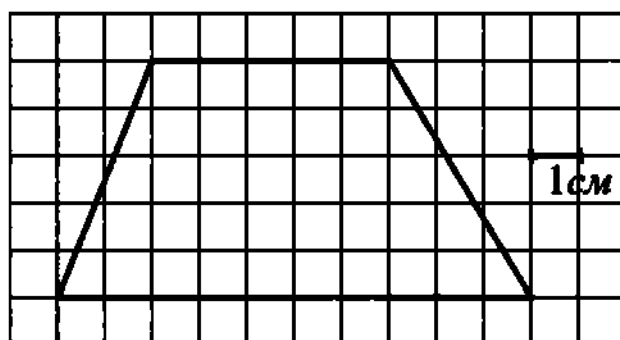


Рис. 39.

В5. Телефонная компания предоставляет на выбор три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за 1 минуту разговора
1. Повременный	150 руб.	30 копеек
2. Комбинированный	280 руб. за 600 мин. разговора в месяц	Свыше 600 мин. — 25 копеек за каждую минуту
3. Безлимитный	400 руб.	0 копеек

Абонент выбрал наиболее дешёвый тарифный план, исходя из предположения, что общая длительность телефонных разговоров у него составляет 1000 минут в месяц. Какую сумму он должен заплатить за месяц, если общая длительность разговоров в этом месяце у него составила 1200 минут? Ответ запишите в рублях.

В6. Решите уравнение $|3 - 2x| = 5$. Если корней несколько, то в ответе запишите их сумму.

В7. Определите количество корней уравнения $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi)$.

В8. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-5; 8]$. На рисунке 40 изображён график её производной $y = f'(x)$. Найдите точку минимума этой функции на отрезке $[-3; 6]$.

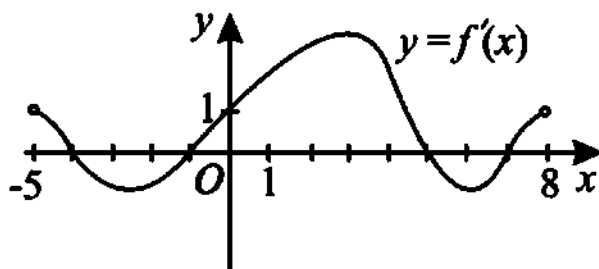


Рис. 40.

В9. Маховик, задерживаемый тормозом, за t секунд поворачивается на угол $\varphi = \varphi(t)$ радиан. Используя график функции φ (см. рис. 41) и касательную к этому графику, проведённую в точке с абсциссой $t_0 = 2$, определите угловую скорость ω ($\omega = \varphi'(t)$) вращения маховика в момент времени $t_0 = 2$ с.

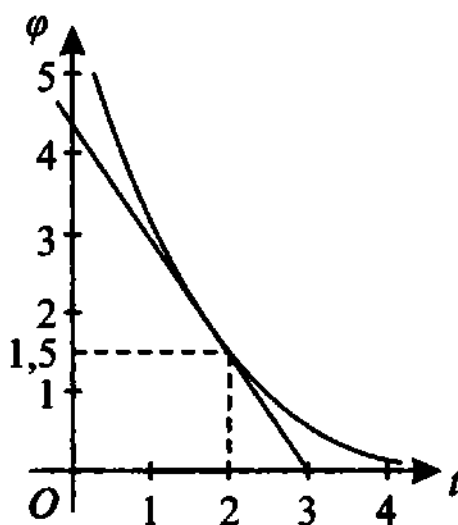


Рис. 41.

В10. Найдите наименьшее значение функции $y = 4 \cos x - 15$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

В11. Первая труба пропускает в минуту на 4 литра воды меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 320 литров она заполнит на 10 минут быстрее, чем первая труба заполнит резервуар объёмом 200 литров?

В12. Площадь поверхности куба равна 150. Найдите объём куба.

Часть 2

С1. Решите уравнение
$$\frac{2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

С2. Найдите множество значений функции $y = 2\sqrt{2} \cos^2 x \sin 2x - \sin 2x + 1.$

С3. В треугольнике ABC проведены биссектриса AD и биссектриса CK . При этом точки D и K лежат соответственно на сторонах BC и AB . Найдите отношение площадей треугольников $S_{ABC} : S_{AKD}$, если $AB = 12$, $AC = 24$, $CB = 16$.

С4. Чему должна быть равна глубина бассейна с квадратным дном, чтобы на облицовку его внутренних стен и дна пошло наименьшее количество материала, если известно, что объём бассейна равен 2048 м^3 ?

С5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство
$$\frac{x - 1 - (a + 4)\sqrt{x - 2} + 4a}{4 + \sin \sqrt{x - 11} - a} \geq 0$$
 не имеет решений.

С6. Найдите число k , которое делится на 4 и на 7 и имеет ровно 10 делителей (включая 1 и k).

Вариант №5

Часть 1

В1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 470 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 13 школьников и 2-х взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ выразите в рублях.

В2. На графике (см. рис. 42) показано изменение цены билета в метрополитене в период с 1 января 1998 года по 1 января 2009 года. Определите по графику стоимость в рублях одной поездки в метро 23 августа 2002 года.

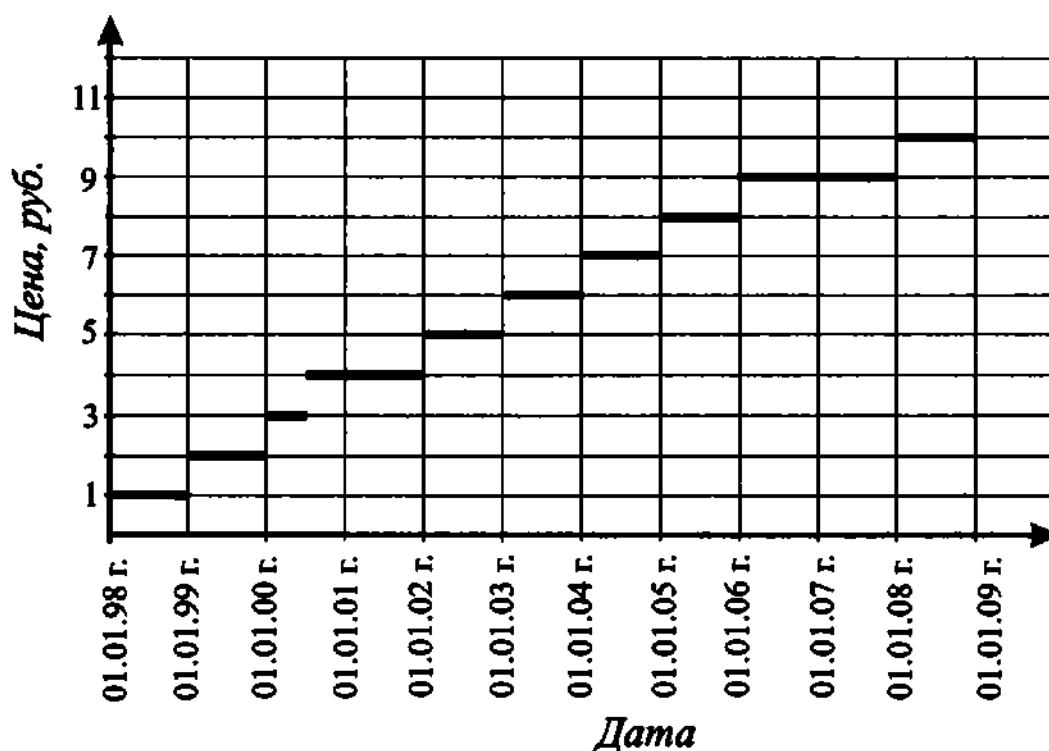


Рис. 42.

В3. Упростите выражение $2 \cdot \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x + 5 \sin^2 x + 5 \cos^2 x$.

В4. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 43). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

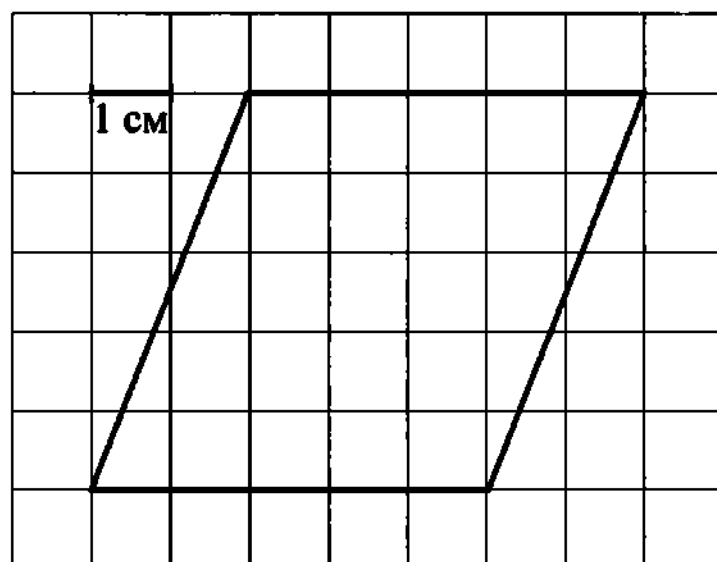


Рис. 43.

В5. Планируется купить 80 килограммов краски у одного из трёх поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость краски (руб. за 1 кг)	Стоимость доставки	Дополнительные условия доставки
1	300	12 000	
2	320	10 000	При заказе товара на сумму свыше 30 000 рублей доставка бесплатно
3	340	10 000	При заказе товара на сумму свыше 25 000 рублей доставка бесплатно

В6. Решите уравнение $|x - 1| - |2x + 3| = 0$.

В ответе запишите количество корней этого уравнения.

В7. Найдите корни уравнения $2 \cos x = 1$, принадлежащие промежутку $(0; \frac{\pi}{2}]$. Ответ запишите в градусах.

В8. На рисунке 44 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 1. Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = 1$.

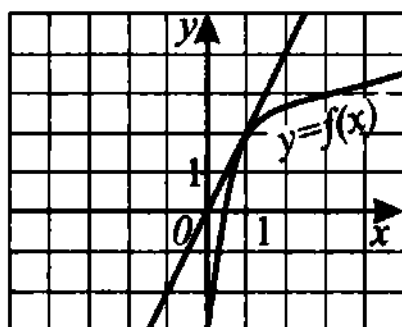


Рис. 44.

В9. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 8t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Определите, на какой высоте его скорость равнялась 3 м/с.

В10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2 \sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

В11. Из бутылки, доверху наполненной кислотой, отлили 8 литров. Затем снова наполнили бутылку водой и отлили 6 литров смеси. После этого

вновь наполнили бутылку водой. Определите вместимость бутылки, если в результате получили смесь, содержащую 42% кислоты.

В12. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основанием его является квадрат со стороной $4\sqrt{2}$, а его высота равняется 3. Определите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A_1, B, D .

Часть 2

С1. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x \cos x + 3 \sin x = 0$.

С2. Найдите множество значений функции $y = \sin x - \cos x + \sqrt{2}$.

С3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке T , а сторону BC в точке K . Найдите KT , если $AB = 12$, $AD = 16$, $AT = 13$.

С4. Определите наименьшее значение периметра прямоугольного треугольника, если его площадь равна 9.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\frac{x^2 + 8(a+1)x + 16a^2}{4 - (\cos \sqrt{6-a-a^2} + 3)} > 0 \text{ выполняется для всех } x \in (-2; 1).$$

С6. Если к десятичной записи натурального числа a приписать справа запятую, а потом некоторый бесконечный набор цифр, то получится десятичная запись такого иррационального числа c , что $(2c - 3)^2 = 3a^2 - 12c + 46$. Найдите все возможные значения числа c .

Вариант №6

Часть 1

В1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 540 рублей. Стоимость билета школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 18 школьников и трёх взрослых. Сколько стоят билеты на всю группу? Ответ запишите в рублях.

В2. На графике (см. рис. 45) показано изменение цены в метрополитене в период с 1 января 1998 года по 1 января 2009 года. Определите по графику стоимость в рублях одной поездки в метро 11 июля 2001 года.

В3. Упростите выражение $3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + 5 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

В4. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$ (см. рис. 46). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

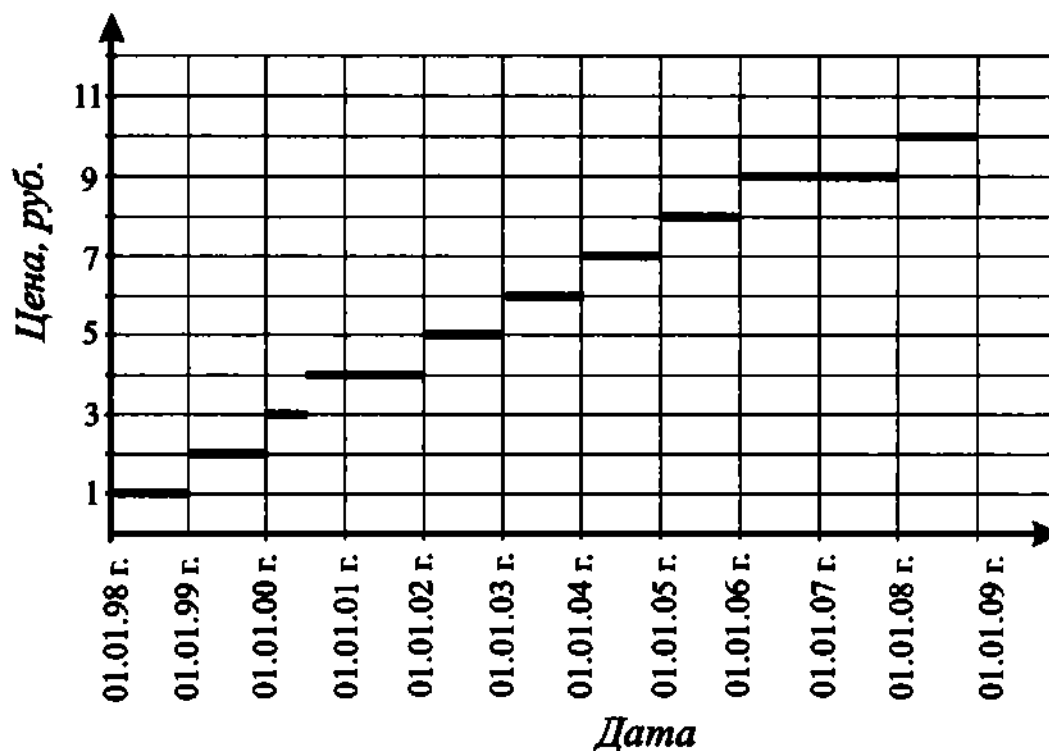


Рис. 45.

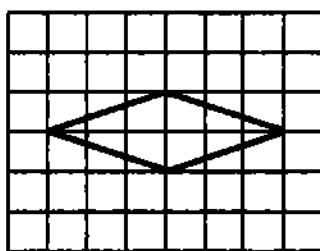


Рис. 46.

В5. Планируется купить 110 килограммов краски у одного из трёх поставщиков. Цены и условия приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость краски (руб. за 1 кг)	Стоимость доставки	Дополнительные условия доставки
1	300	10 000	-
2	350	8 000	При заказе товара на сумму свыше 42 000 руб. доставка бесплатно
3	370	8 000	При заказе товара на сумму свыше 40 000 руб. доставка бесплатно

Сколько рублей нужно заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой?

В6. Решите уравнение $|x - 3| - |x + 2| = 0$.

В ответе укажите количество корней этого уравнения.

В7. Решите уравнение $2 \sin x = \sqrt{2}$ на промежутке $(0^\circ; 90^\circ]$.

Ответ запишите в градусах.

В8. На рисунке 47 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к графику в точке с абсциссой, равной -1 . Найдите значение производной этой функции в точке $x_0 = -1$.

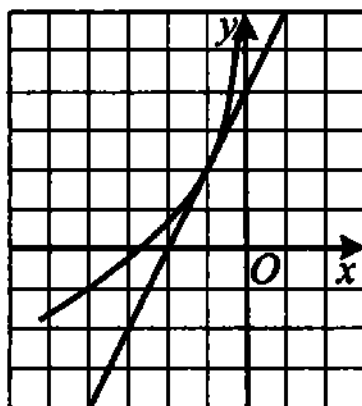


Рис. 47.

В9. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -3t^2 + 11t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Определите, на какой высоте находился камень, когда его скорость составляла 5 м/с.

В10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = \cos 2x + \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \text{ на отрезке } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

В11. Из бутылки, доверху наполненной глицерином, отлили 4 литра. Затем бутылку наполнили водой и отлили два литра смеси. После этого снова наполнили бутылку водой. Определите вместимость бутылки, если в результате получили смесь, содержащую 48% глицерина.

В12. Дан прямой параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его основанием является квадрат $ABCD$ со стороной $6\sqrt{2}$, а его высота равняется $2\sqrt{7}$. Определите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A_1, B, D .

Часть 2

С1. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x \cos x + 2 \sin x = 0$.

С2. Найдите множество значений функции $y = \cos x + \sin x + \sqrt{2}$.

С3. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке T , а сторону BC в точке K . Найдите KT , если $AB = 4$, $AD = 8$, $BT = 2,4$.

С4. Определите наименьшее значение периметра прямоугольного треугольника, если его площадь равна 32.

С5. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$\frac{x^2 + 2(a + 2)x + a^2}{4(\cos \sqrt{8 + 2a - a^2} + 3)} > 0 \text{ выполняется для всех } x \in (-1; 2).$$

С6. Если в записи натурального числа a приписать справа запятую, а потом набор цифр, то получится запись такого иррационального числа c , что $(2c - 5)^2 = 3a^2 - 20c + 47$. Найдите все возможные числа c .

Вариант №7

Часть 1

В1. Группа из 20 школьников и 4 взрослых отправилась на теплоходе на морскую прогулку. Одна путёвка для взрослого стоит 350 рублей, а для школьника стоимость путёвки составляет 40% от стоимости путёвки взрослого. Сколько рублей надо заплатить за всю группу?

В2. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток, начиная с 15 ноября (см. рис. 48). На оси абсцисс отмечено время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику наименьшую температуру 17 ноября. Ответ дайте в градусах Цельсия.

В3. Упростите выражение $(1 - \cos \alpha)^2 + (1 + \cos \alpha)^2 + 2 \sin^2 \alpha$.

В4. Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 49. Размер клетки 1 см \times 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

В5. Семья из четырёх человек едет из Перми в Сочи. Можно ехать поездом или на своей машине. Билет на поезд стоит 1500 рублей на одного человека. Машина расходует 10 л бензина на 100 км пути; расстояние от Перми до Сочи по шоссе равно 2100 км, а цена бензина — 22 рубля за литр. Сколько рублей надо заплатить семье за наиболее дешёвую поездку?

В6. Решите уравнение $|2x - 5| = |3x - 1|$. В ответе запишите сумму корней, если их несколько.

В7. Решите уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ укажите в градусах.

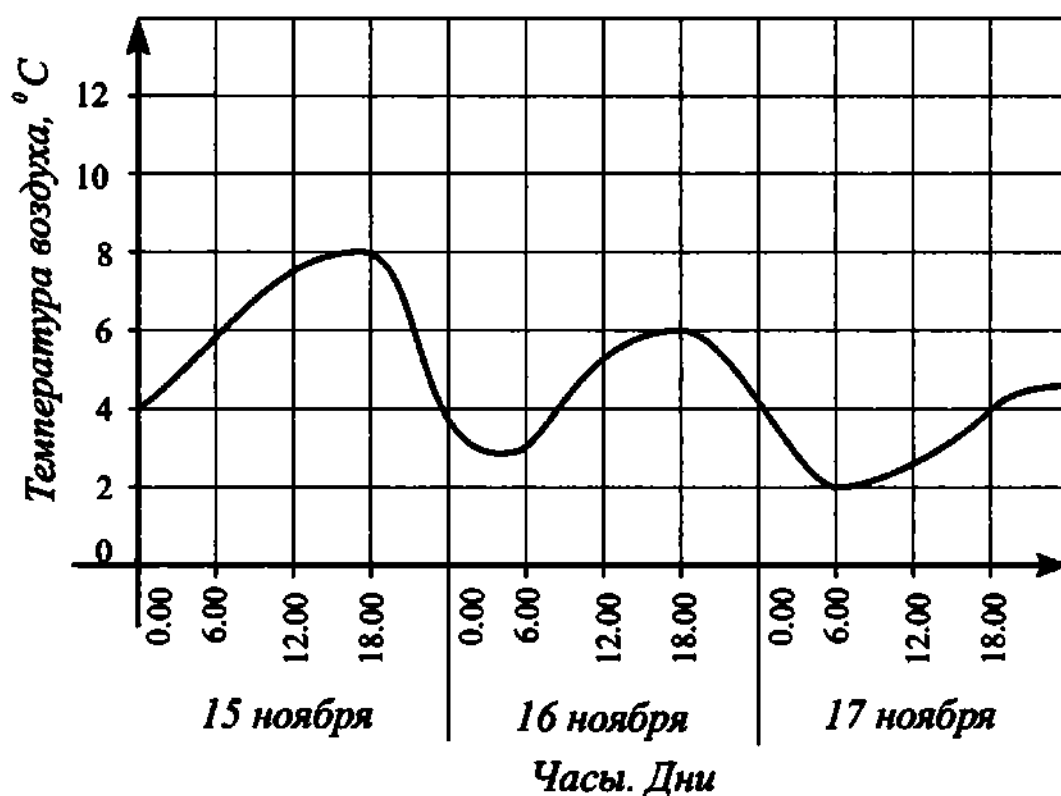


Рис. 48.

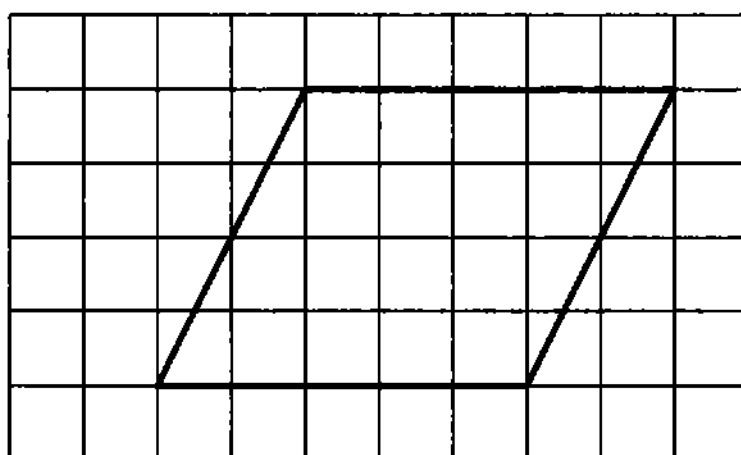


Рис. 49.

В8. На рисунке 50 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение $f'(x_0)$.

В9. При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $s(t) = t^3 - t^2 + 5t - 7$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость тела через 5 секунд после начала движения.

В10. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 5\sqrt{2} \cos x + 5x - \frac{5\pi}{4} + 3 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

В11. Двое рабочих, работая одновременно, выполняют весь необходимый объем за 6 часов. За сколько часов в одиночку выполнит этот объем

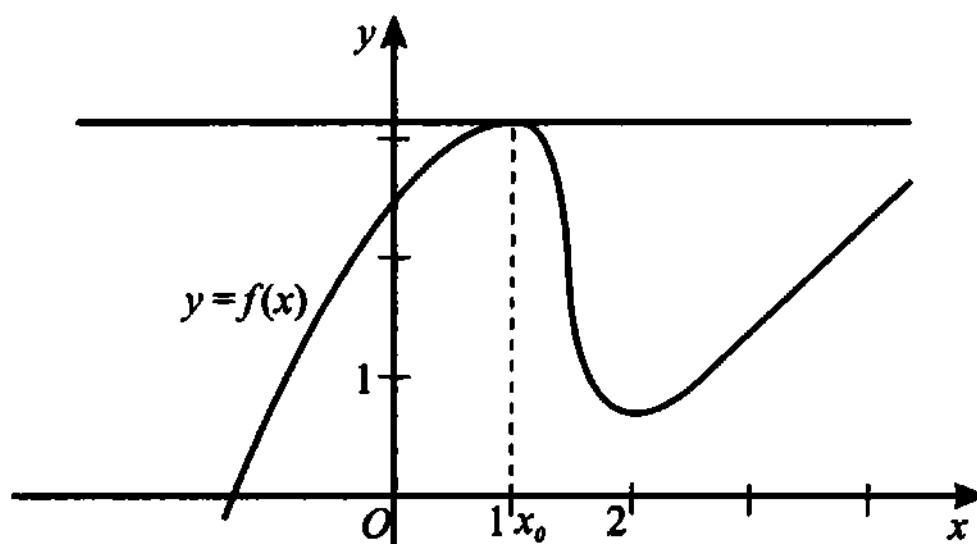


Рис. 50.

первый рабочий, если известно, что он сделает работу на 5 часов быстрее, чем второй?

В12. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, апофема — 4. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Часть 2

С1. Решите уравнение $12 \operatorname{ctg} x - \cos 2x - 1 = 2 \sin 2x$.

С2. Найдите множество значений функции $y = 3 \sin x - 4 \cos x + 5$.

С3. Трапеция $MNPK$ с прямым углом KMN описана около окружности радиусом 3. Найдите среднюю линию трапеции, если угол между средней линией и боковой стороной PK равен 30° .

С4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Каков должен быть периметр этого треугольника, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

С5. При каких значениях параметра m уравнение $\sqrt{x^2 - 2x} = m - x$ имеет корни?

С6. Если двузначное число разделить на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 3, а в остатке 5. Если же это число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8, а в остатке 4. Найдите это число.

Вариант №8**Часть 1**

В1. До повышения цены учебник стоил 96 рублей, а после повышения цены стал стоить 120 рублей. На сколько процентов была повышена цена учебника?

В2. На графике показана среднесуточная температура воздуха с 5 по 12 июня 1995 года в городе Сочи (см. рис. 51). Определите в градусах разность максимальной и минимальной температур в этот период времени.

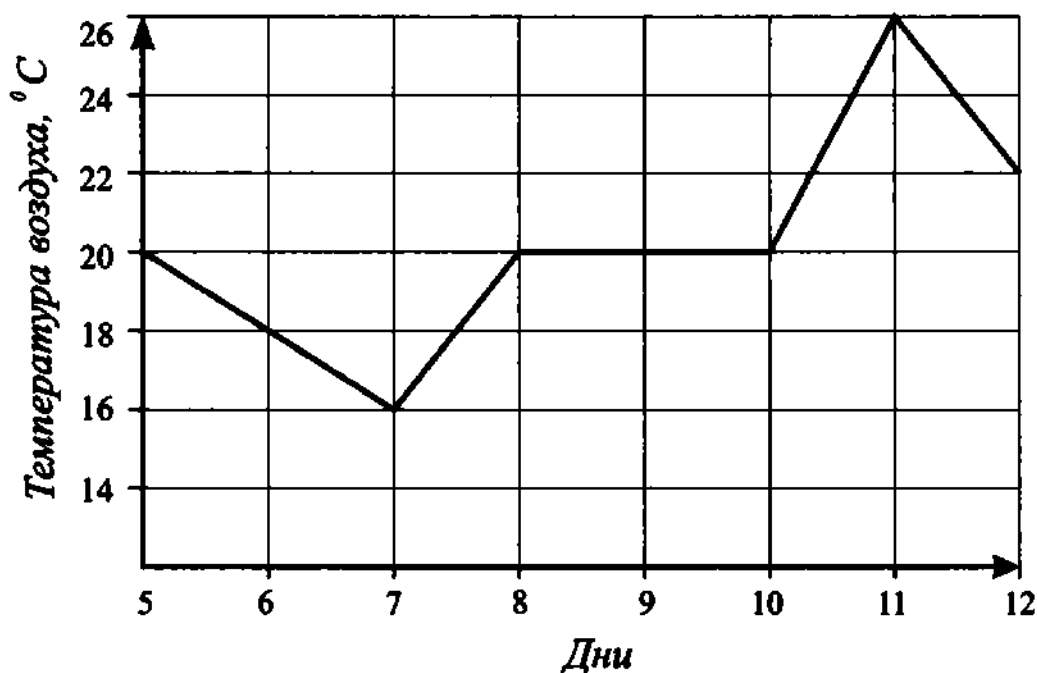


Рис. 51.

В3. Упростите выражение $(1 + \sin \alpha)^2 + (1 - \sin \alpha)^2 + 2 \cos^2 \alpha$.

В4. Вычислите площадь четырёхугольника, изображённого на рисунке 52. Размер клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

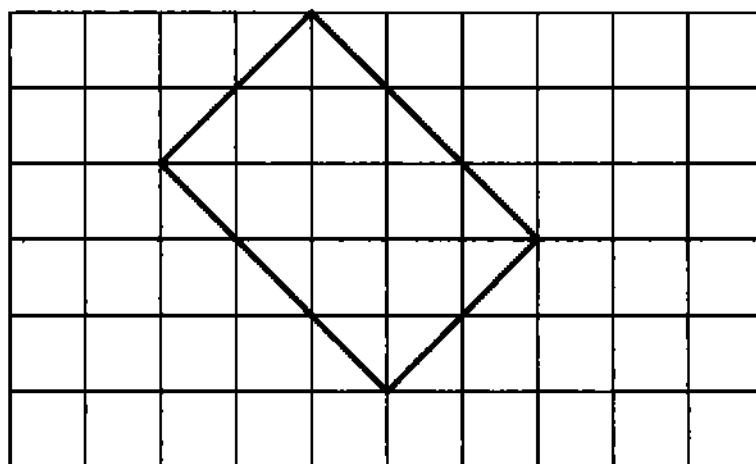


Рис. 52.

В5. Фермер для остекления теплицы должен заказать 40 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,2 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей нужно заплатить фермеру за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
1	320	15
2	300	25
3	350	10 или бесплатно, если сумма заказа более 1800 рублей

В6. Решите уравнение $|3x - 8| = |5x - 2|$. В ответе запишите сумму корней, если их несколько.

В7. Решите уравнение $\sqrt{2} \cdot \sin x = -1$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$. Ответ запишите в градусах.

В8. На рисунке 53 изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение $f'(x_0)$.

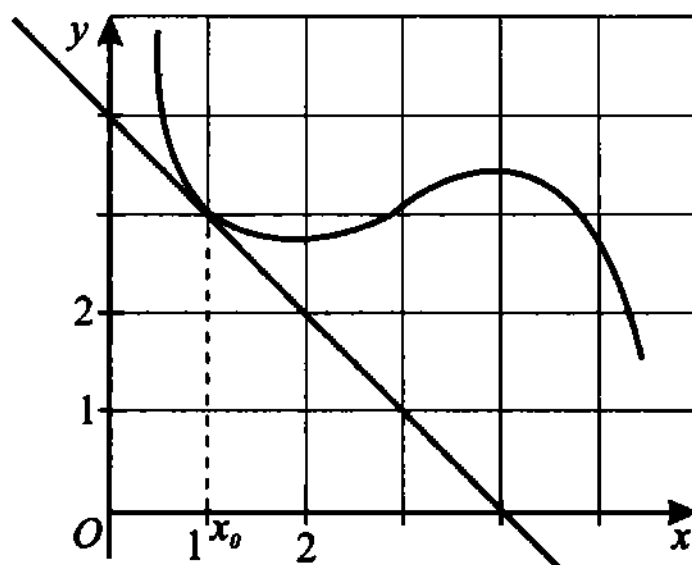


Рис. 53.

В9. При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки изменяется по закону $s(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 15t + 7$ (t — время движения в секундах). Сколько мгновенных остановок ($v_{\text{мгн.}} = 0$) сделает тело за первые 6 секунд своего движения?

В10. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{4}{x-1}$ на отрезке $[2; 4]$.

В11. Имеются два сплава меди и цинка. В одном сплаве количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, а в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором медь и цинк были бы в отношении 5 : 11? В ответе запишите массу меньшего сплава.

В12. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 3, апофема пирамиды образует с высотой угол 30° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Часть 2

С1. Решите уравнение $1 - \sin^2 x + \sin 2x = 1 - 5 \operatorname{tg} x$.

С2. Найдите множество значений функции $y = \frac{\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

С3. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиусом 3. Найдите площадь трапеции, если косинус угла при основании равен 0,8.

С4. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса 5 так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найдите эту площадь.

С5. Решите уравнение $\sqrt{\sin 2x - m \cos 2x} + \sin x = 0$, если известно, что $x = \frac{-\pi}{2}$ — один из его корней.

С6. Искомое трёхзначное число оканчивается цифрой 5. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных двух цифр, то вновь полученное число будет больше искомого на 162. Найдите это число.

Вариант №9

Часть 1

В1. Женские коньки стоили в магазине 1200 рублей. Сколько пар коньков можно купить на 6250 рублей весной после скидки 35%?

В2. На графике (см. рис. 54) показано количество осадков, выпавших в течение месяца. На оси абсцисс отмечены дни, на оси ординат — количество осадков, выпавших к этому дню в мм. Определите по графику, какого числа уровень выпавших осадков достиг 40 мм.

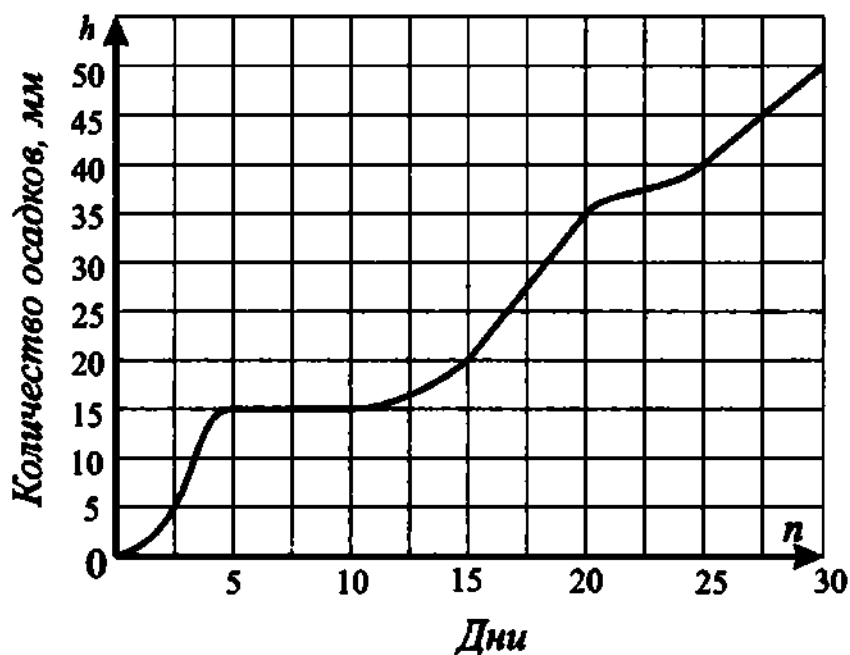


Рис. 54.

В3. Найдите значение выражения $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$.

В4. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 55. Ответ дайте в квадратных сантиметрах (примите $\pi = 3,1$). Округлите до целого значения.

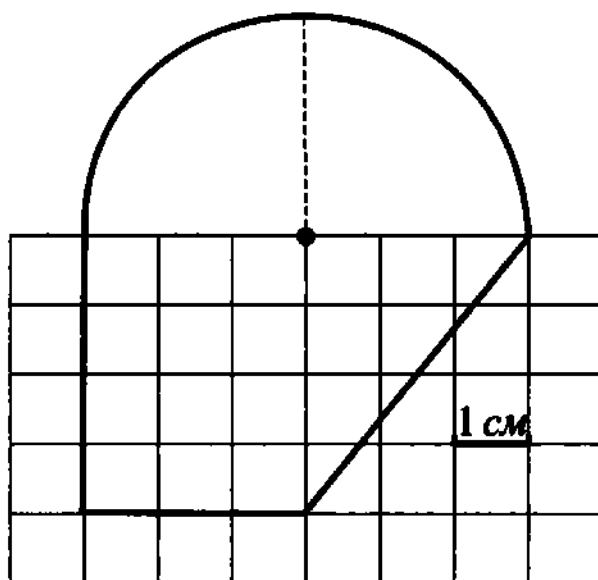


Рис. 55.

В5. Для изготовления стеклянных столов требуется заказать 46 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,2 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стёкол и шлифовку края. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за 1 стекло)
А	305	18
Б	330	12
В	350	7 (Бесплатно, если стоимость заказа больше 3000 руб.)

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|3x - 15| \leq 9$.

В7. Решите уравнение $\cos x = \sin 2x \cdot \cos x$ на промежутке $[0^\circ; 60^\circ]$. Ответ запишите в градусах.

В8. Прямая $y = \frac{2}{3}x + 7$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 6x + 5$. Найдите абсциссу точки касания. Ответ округлите до сотых.

В9. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5 \cdot t^2 + 15t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Определите, на какой высоте его скорость составила 10 м/с при падении с максимальной высоты вниз.

В10. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ на отрезке $[-1; 4]$.

В11. Имеются два слитка, содержащие иридий. Масса первого слитка в 3 раза меньше, чем масса второго. Процентное содержание иридия в первом слитке — 40%, во втором слитке — 20%. Каково будет процентное содержание иридия в сплаве этих двух слитков?

В12. Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды со стороной основания 8 см и высотой $\sqrt{3}$ см.

Часть 2

С1. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{2}{3} \sin 2x + \frac{5}{6} \sin^2 2x = 0$.

С2. Найдите множество значений функции $y = 4 \sin 3x - 4 \cos 3x + 5$.

С3. На хорде AB окружности с центром O взята точка M так, что $MB = 5$. Через точки A , M и O проведена окружность, которая пересекает первую окружность в точках A и C . Найдите длину MC .

С4. Жёлоб для водостока решили сделать из листа железа так, чтобы через него могло протекать максимальное количество воды в единицу вре-

мени. Размеры листа: длина — 1,5 м, ширина — $20\sqrt{2}$ см. Форма жёлоба такова, как показано на рисунке 56. Каков будет объём жёлоба в литрах?

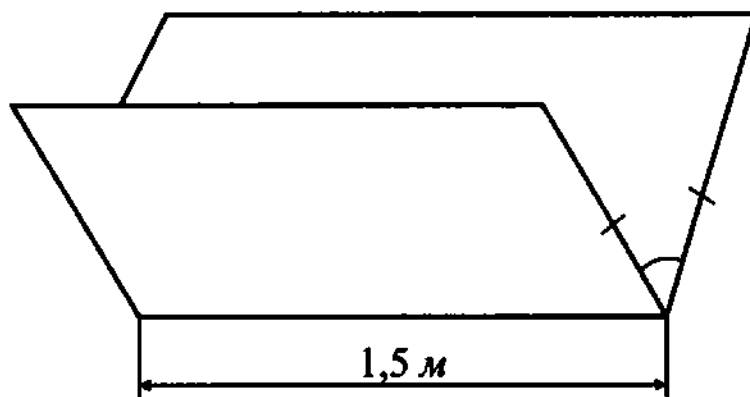


Рис. 56.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2x^4 + 14a^3x^3 + (49a^4 + 6a)x^2 + 42a^2x + 9}{\sqrt{a-2x} - \sqrt{x-a}}} + \sqrt{x^2 + 16x + 48} \geq 0$$

не имеет решений.

С6. В последовательности троек натуральных чисел $(2, 3, 5)$, $(6, 15, 10)$ и т. д. каждая тройка получается из предыдущей следующим образом: первое число умножается на второе, второе — на третье и третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку. Найдите, сколько чисел, получаемых таким образом, можно представить в виде m^n , где m, n — натуральные числа и $n \geq 2$.

Вариант №10

Часть 1

В1. Мужские коньки стоили в магазине 1400 рублей. Сколько пар коньков можно купить на 6750 рублей весной после скидки 40%?

В2. На графике (см. рис. 57) показано количество осадков, выпавших в течение месяца в определённом месте области. На оси абсцисс отмечены дни, на оси ординат — количество осадков в мм, выпавших к этому дню. Определите по графику, в какой день количество выпавших осадков достигло 20 мм.

В3. Найдите значение выражения $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$.

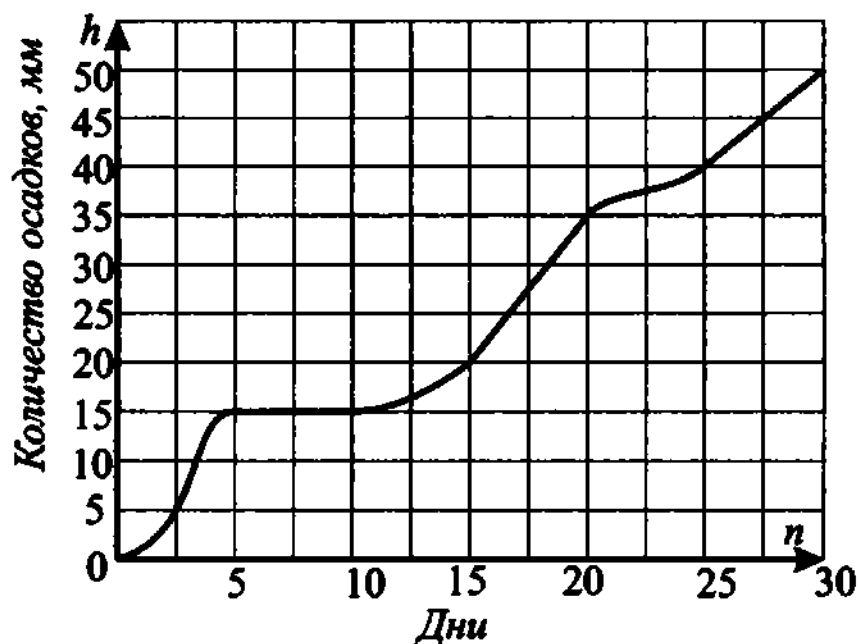


Рис. 57.

В4. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 58. Ответ дайте в квадратных сантиметрах (примите $\pi = 3,1$). Округлите до целого значения.

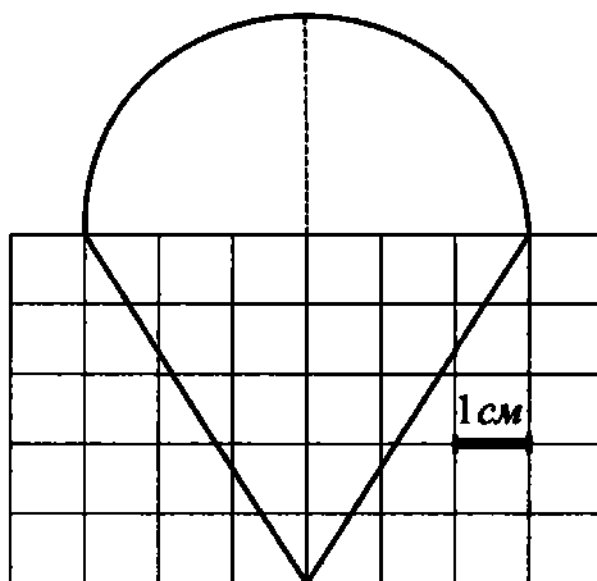


Рис. 58.

В5. Для изготовления стеклянных столов требуется заказать 30 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,15 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стёкол и шлифовку края. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за 1 стекло)
А	310	15
Б	320	10
В	360	5 (бесплатно, если стоимость заказа больше 1500 руб.)

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $|2x - 4| \leq 8$.

В7. Решите уравнение $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$ на промежутке $[0^\circ; 45^\circ]$. Ответ запишите в градусах.

В8. Прямая $y = -\frac{1}{3}x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 5x - 12$. Найдите абсциссу точки касания. Ответ округлите до сотых.

В9. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5 \cdot t^2 + 12t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Определите, на какой высоте его скорость составила 7 м/с при падении с максимальной высоты вниз.

В10. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ на заданном отрезке $[-1; 3]$.

В11. Имеются два слитка, содержащие свинец. Масса первого слитка на 10 кг меньше, чем масса второго. Процентное содержание свинца в первом слитке — 60%, во втором слитке — 30%. В сплаве этих двух слитков содержание свинца составило 37,5%. Найдите массу полученного сплава.

В12. Найдите площадь полной поверхности правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания 10 см и высотой 12 см.

Часть 2

С1. Решите уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{5}{2} \sin 2x - \sin^2 2x = 0$.

С2. Найдите множество значений функции $y = 3 \sin 2x - 3 \cos 2x + 7$.

С3. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120° . Точка C лежит на этой дуге, а точка D — на хорде AB . $AD = 8$, $DB = 4$, $CD = 4\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .

С4. Жёлоб для водостока решили сделать из листа железа так, чтобы через него могло протекать максимальное количество воды в единицу времени. Размеры листа: длина — 1,5 м, ширина — 40 см. Форма жёлоба такова, как показано на рисунке 59. Каков будет объём жёлоба в литрах?

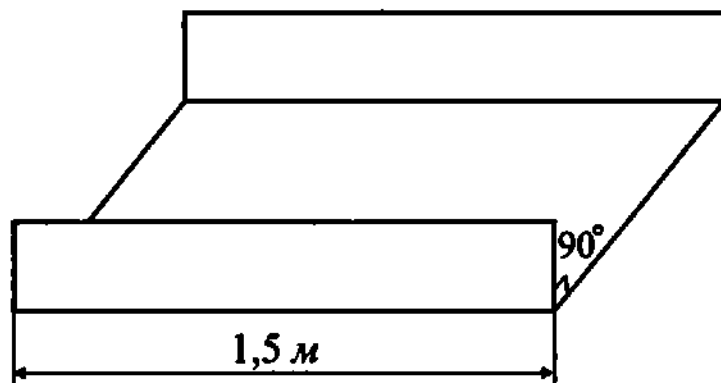


Рис. 59.

С5. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\sqrt{\frac{x^4 + 10ax^3 + 33a^2x^2 + 40a^3x + 16a^4}{\sqrt{a - 3x} - \sqrt{x - a}}} + \sqrt{x^2 + 16x + 55} \geq 0$$
 не имеет решений.

С6. На доске выписаны числа от 1 до 2010. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно число — модуль их разности. После повторения указанной процедуры несколько раз на доске останется одно число. Какое это может быть число?

Вариант № 11

Часть 1

В1. Упростите выражение $2 \sin^2 x + 4 + 2 \cos^2 x$.

В2. Решите уравнение $2 \cos x - 1 = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 + 2 \sin 4x$.

В4. При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 5$, если известно, что $f(x) = 4\sqrt{x-1} + 3x - 11$?

В5. Упростите выражение $\operatorname{ctg}^2 x \cdot (1 - \cos^2 x)$, если $\cos x = 0,2$.

В6. Решите уравнение $\cos^2 2x + 3 \cos 2x + 2 = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ запишите в градусах.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sqrt{3} \cos \frac{x}{3}$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.

В8. Вычислите $\frac{\cos 26^\circ \cos 22^\circ - \cos 64^\circ \cos 68^\circ}{2 \sin 21^\circ \cos 21^\circ}$.

В9. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = t^3 + t^2 + 2$, где x — перемещение в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени ускорение точки будет равно $8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$?

В10. Найдите максимум функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 15$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(c; d)$. На рисунке 60 изображён график производной функции $y = f'(x)$. Найдите количество точек минимума функции.

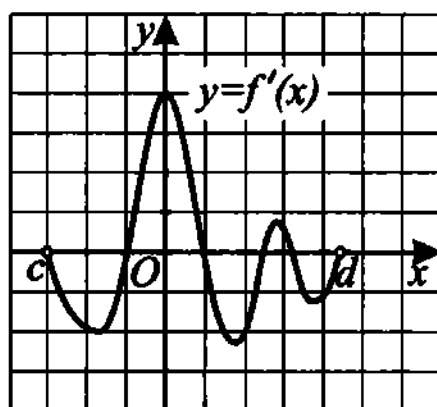


Рис. 60.

В12. При каком положительном значении параметра a наименьший положительный период функции $y = \frac{1}{2} \cos\left(a^2x + \frac{\pi}{3}\right)$ равен 8π ?

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{16 - x^2} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 2 \right) = 0$?

С2. При каком наименьшем значении a уравнение $-x^3 - 3x^2 + 8 - a = 0$ имеет ровно два корня?

С3. Решите уравнение: $\operatorname{tg} 6x \cos 2x - \sin 2x - 2 \sin 4x = 0$.

С4. Найдите множество значений функции $y = \arccos \left(\frac{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{4} \right)$.

С5. Определите наименьшую суммарную длину всех рёбер прямо-угольного параллелепипеда, полная поверхность которого равна 600 см^2 , если основание его является квадратом.

С6. Найдите, при каком значении параметра p графики функций $f(x) = p \sin^2 x + 2 \cos x - p$ и $g(x) = 4 - 2p \cos x$ имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант № 12

Часть 1

В1. Упростите выражение $2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 x$.

В2. Решите уравнение $5 \sin x = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наименьшее значение функции $y = 1,5 - 2 \sin x$.

В4. При каком значении x выполняется равенство $f'(x) = -3$, если известно, что $f(x) = 15 - 2x + 4\sqrt{5-x}$?

В5. Упростите выражение $5 + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot \sin^2 x$, если $\cos^2 x = 0,3$.

В6. Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{2} - 5 \sin \frac{x}{2} + 4 = 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

В8. Вычислите $\frac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \sin 5^\circ}{\cos 18^\circ \cos 62^\circ - \sin 62^\circ \cos 72^\circ}$.

В9. Точка движется по координатной прямой согласно закону $s(t) = -9t^2 + t^3 - 11$, где s — перемещение в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени ускорение точки будет равно нулю?

В10. Найдите минимум функции $y = \frac{7x^4}{4} + \frac{14x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 2$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 7)$. График её производной изображён на рисунке 61. Укажите количество точек максимума функции $y = f(x)$.

В12. При каком отрицательном значении параметра a период функции $y = -\frac{1}{2} \cos\left(a^2 x + \frac{\pi}{16}\right)$ равен $\frac{\pi}{8}$?

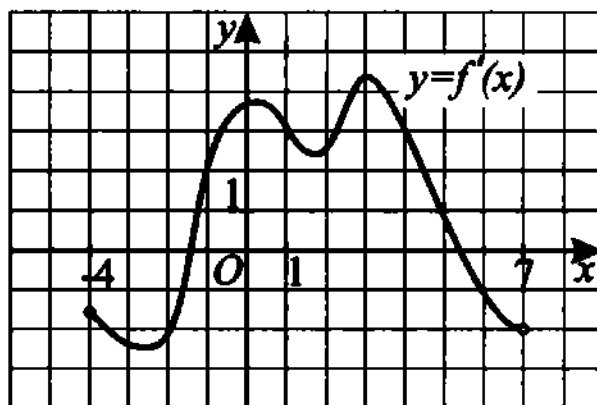


Рис. 61.

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $(\sqrt{2} \cos x - 1)\sqrt{-4x^2 + 7x - 3} = 0$?

С2. При каком наименьшем значении a уравнение $x^4 - 8x^2 + 7 - a = 0$ имеет ровно два корня?

С3. Решите уравнение $\sin 6x + \operatorname{ctg} 3x \cos 6x = \cos 3x$.

С4. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{4}{\pi} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x) \right).$$

С5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AC = 2\sqrt{2}$ м, а $AA_1 = 1$ м. Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда, имеющего наибольший объем.

С6. При каких значениях параметра p система уравнений
$$\begin{cases} y = 5p + 4 \sin x + p \cos x + \sin 2x, \\ y = 3 \cos x + 2p \sin x + p^2 + 6 \end{cases}$$
 не имеет решений?

Вариант №13

Часть 1

В1. Упростите выражение $1 - \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x$.

В2. Решите уравнение $\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{\cos^2 x} + 1$.

В4. При каких целых значениях x выполняется равенство

$$f'(x) = 11, \text{ если известно, что } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x^3 + x - 1?$$

В5. Упростите выражение $3 \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x - 5$, если $\sin x = 0,4$.

В6. Решите уравнение $\cos 10x + 2 \sin^2 5x = 2 \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ запишите в градусах.

В7. На графике функции $y = -4x + 2\sqrt{x}$ найдите абсциссу точки, в которой касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° .

В8. Вычислите $\frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ \cos 105^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \sin 108^\circ \sin 27^\circ}$.

В9. Тело движется по координатной прямой согласно закону $s(t) = t^3 - 5t^2 + 6t + 7$, где s — перемещение в метрах, t — время в секундах. В какой момент времени ускорение точки будет равно $8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$?

В10. Найдите минимум функции $y = -\frac{x^5}{5} + x^3 + 4x - \frac{2}{5}$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. График её производной изображён на рисунке 62. Найдите длину наибольшего промежутка убывания функции $y = f(x)$.

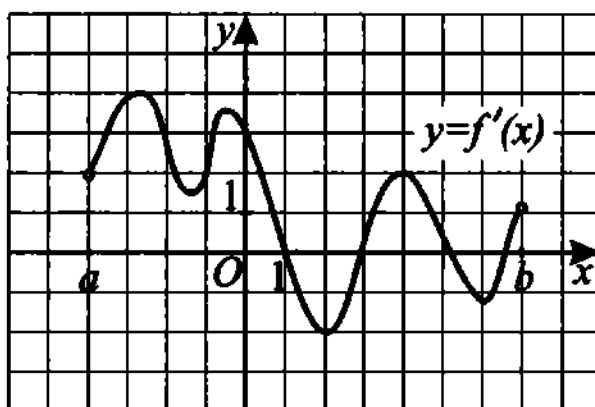


Рис. 62.

В12. При каком значении параметра k период функции $y = 2 \sin(kx + 8)$ равен 8π ?

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4 - x^2}(\sin^7 x - \cos^7 x) = 0$?

С2. При каком значении a уравнение $x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 96x + a = 0$ имеет ровно три корня?

С3. Решите уравнение $4 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1$.

С4. Найдите множество значений функции

$$y = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} \sin x - \cos x + 4) \right).$$

С5. Найдите наибольший объём правильной четырёхугольной призмы, периметр диагонального сечения которой равен 6 дм.

С6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = \sin 2x + a \cos x + 4 \sin x + 3a, \\ y = \cos x + 2a \sin x + a^2 + 2 \end{cases}$$

не имеет решений?

Вариант №14

Часть 1

В1. Упростите выражение $3 \cos^2 x - \frac{3}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 2$.

В2. Решите уравнение $\sqrt{3} - \operatorname{ctg} x = 0$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наибольшее значение функции $y = \cos^2 x + 2$.

В4. При каком наименьшем значении x выполняется равенство $f'(x) = 0$, если известно, что $f(x) = \frac{4}{x-3} + x$?

В5. Упростите выражение $\operatorname{ctg}^2 x - 2 \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{3}$, если $\sin^2 x = \frac{1}{6}$.

В6. Решите уравнение $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x = \frac{1}{2} \cos^2 x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

В8. Вычислите $\frac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)}{\sin 80^\circ \cos 15^\circ - \cos 80^\circ \cos 75^\circ}$.

В9. Два тела совершают прямолинейное движение по законам $s_1(t) = 3t^2 - 2t + 10$, $s_2(t) = t^2 + 5t + 1$, где t — время в секундах, а $s_1(t)$

и $s_2(t)$ — пути в метрах, пройденные соответственно первым и вторым телами. Через сколько секунд, считая от $t = 0$, скорость движения первого тела будет в два раза больше скорости движения второго тела?

В10. Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции

$$y = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}.$$

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. График её производной изображён на рисунке 63. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке $(-6; 3)$.

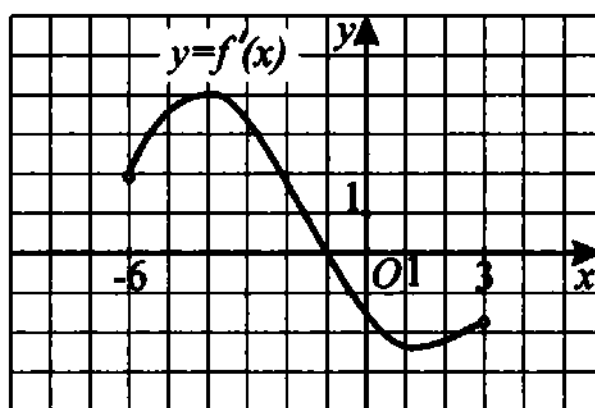


Рис. 63.

В12. При каком значении параметра a период функции

$$y = -3 \sin\left(ax + \frac{\pi}{4}\right) \text{ равен } \pi?$$

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{7x - x^2}(2 \cos x - 1) = 0$?

С2. При каком наибольшем значении k уравнение

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 + 18 - k = 0 \text{ имеет ровно три корня?}$$

С3. Решите уравнение $(\sin x - \cos x)^2 + \operatorname{tg} x = 2 \sin^2 x$.

С4. Найдите множество значений функции

$$y = 2 \arccos \frac{\sin x + \cos x + \sqrt{2}}{4} + 1.$$

С5. Найдите наибольшую площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной призмы, у которой диагональ равна $\sqrt{2}$ м.

С6. При каком целом значении параметра k система уравнений

$$\begin{cases} y = 2k \sin x - \cos^2 x, \\ y = 15 - 8k \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант № 15

Часть 1

В1. Упростите выражение $5 \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x + 5 \sin^2 x \operatorname{ctg}^2 x$.

В2. Решите уравнение $\cos 2x - 1 = 0$ на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \cos 2x + 3$.

В4. При каком наибольшем значении x выполняется равенство

$$f'(x) = 0, \text{ если известно, что } f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 11?$$

В5. Упростите выражение $6 \sin^2 x - 4$, если $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

В6. Решите уравнение $\cos 2x - 2 \cos^2 x = 2 \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ запишите в градусах.

В7. Определите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = 4x^2 - 8x + 4$ параллельна оси абсцисс.

В8. Вычислите $\sqrt{3} \frac{\operatorname{tg} 4^\circ + \operatorname{tg} 26^\circ}{1 - \operatorname{tg} 4^\circ \operatorname{tg} 26^\circ} + 16 \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ$.

В9. При движении тела по прямой расстояние s (в метрах) от начальной точки изменяется согласно закону $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$ (t — время движения в секундах). Укажите момент времени t после начала движения, когда тело сделает первую мгновенную остановку.

В10. Найдите минимум функции $y = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. График её производной изображён на рисунке 64. Укажите число точек максимума функции $y = f(x)$.

В12. При каком значении параметра k период функции $y = -\operatorname{tg}\left(kx + \frac{\pi}{4}\right)$ равен 4π ?

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{5x - x^2}(2 \cos^2 x - 1) = 0$?

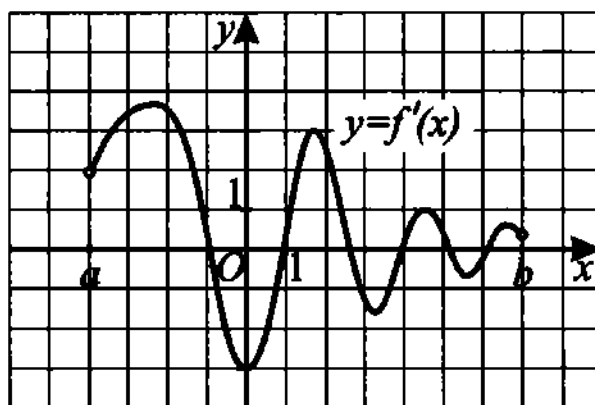


Рис. 64.

С2. При каком наименьшем значении a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ имеет ровно два корня?

С3. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x \cos 5x = \cos 6x + \sin 5x$.

С4. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg} (0,25(\sqrt{3} \sin x - \cos x + 2)).$$

С5. В прямоугольном параллелепипеде периметр основания равен 6 см. Найдите наибольший объём параллелепипеда, если его высота равна одной из сторон основания параллелепипеда.

С6. При каком наименьшем натуральном значении параметра a система уравнений $\begin{cases} y = \sin^2 x - 12a, \\ y = 4 - 6a \sin x \end{cases}$ не имеет решений?

Вариант № 16

Часть 1

В1. Упростите выражение $2 \cos^2 4x + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x + 2 \sin^2 4x$.

В2. Решите уравнение $3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наименьшее значение функции $y = 2 \sin x - 1$.

В4. При каких натуральных значениях x выполняется равенство

$$y'(x) = 0, \text{ если известно, что } y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 7.$$

В5. Упростите выражение $4 - 2 \cos^2 x$, если $\sin^2 x = 0,75$.

В6. Решите уравнение $\sin 6x - 7 \sin 3x = 0$ на промежутке $(0; \frac{\pi}{3}]$. Ответ запишите в градусах.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sin 3x$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi$.

В8. Вычислите $\frac{\cos 105^\circ \sin 35^\circ - \cos 145^\circ \cos 15^\circ}{\sin^2 25^\circ - \cos^2 25^\circ}$.

В9. Тело движется по прямой так, что расстояние s (в метрах) от него до данной точки M этой прямой изменяется по закону $\frac{t^4}{12} - \frac{t^3}{3} + 2t^2 - 5t$ (t — время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения ускорение станет равным $4 \frac{m}{c^2}$?

В10. Найдите наибольшее целое отрицательное число, принадлежащее промежуткам возрастания функции $y = -\frac{x^4}{2} + x^3 + x^2 - 3$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. График её производной изображён на рисунке 65. Найдите наибольшую длину промежутка возрастания функции $y = f(x)$.

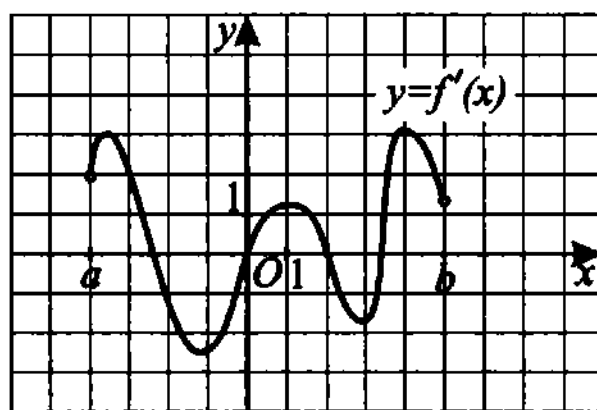


Рис. 65.

В12. При каком отрицательном значении параметра k период функции $y = 4 \operatorname{tg}(k^2 x + \frac{\pi}{3})$ равен 4π ?

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{-x^2 + 8x - 7}(\cos 2x - \sin 2x) = 0$?

С2. При каком наименьшем натуральном значении a уравнение $-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - a = 0$ имеет ровно один корень?

С3. Решите уравнение $5 \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 2x$.

С4. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{4}{\pi} \arccos(\sqrt{0,5}(\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x)).$$

С5. Требуется изготовить закрытый ящик с квадратным дном, объём которого 8 дм^3 . Каковы должны быть линейные размеры ящика, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

С6. Найдите все значения параметра b , при которых графики функций $f(x) = b \operatorname{tg}^2 x$ и $g(x) = 6 - \cos x - b$ имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант № 17

Часть 1

В1. Упростите выражение $6,8 - 4,1 \sin^2 3x - 4,1 \cos^2 3x$.

В2. Решите уравнение $1 - 2 \sin x = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 2 \sin x$.

В4. При каком целом значении x выполняется равенство

$$f'(x) = -1, \text{ если известно, что } f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 21?$$

В5. Упростите выражение $7 \cos^2 x - 3 \operatorname{ctg}^2 x \sin^2 x$, если $\cos^2 x = 0,3$.

В6. Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{2} - 5 \sin \frac{x}{2} + 4 = 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ответ запишите в градусах.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = \frac{1}{(x-7)^2} \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 8.$$

В8. Вычислите $\cos^2 150^\circ - (\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \cos 50^\circ)^2$.

В9. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$, где x — перемещение в метрах, t — время в секундах. Укажите первый момент времени, когда она меняет направление своего движения.

В10. Найдите наименьшее натуральное число, принадлежащее промежутку возрастания функции $y = \frac{x^4}{4} - 4x^3 + 18x^2 - 9$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 3)$. График её производной изображён на рисунке 66. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$.

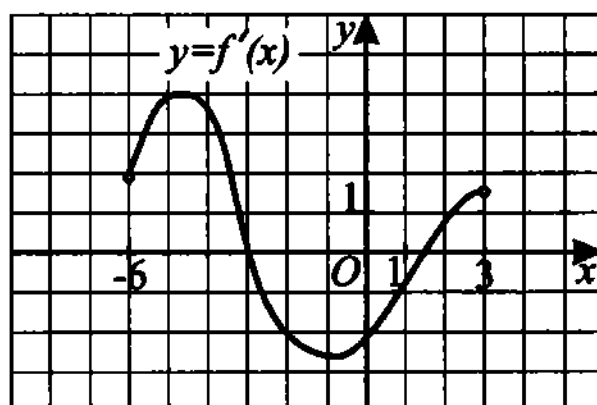


Рис. 66.

В12. Найдите наименьший положительный период функции $y = 2 \sin x + 3 \cos 2x$ (считать число π равным 3).

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 \sqrt{64 - x^2} = 0$?

С2. При каком натуральном значении a уравнение $x^3 - 3x + 2 - a = 0$ имеет ровно два корня?

С3. Решите уравнение $3 - \cos 4x = \frac{14\sqrt{3}}{3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x}$.

С4. Найдите множество значений функции $y = \frac{12}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot (\sin x + \cos x) \right)$.

С5. Диагональ боковой грани правильной четырёхугольной призмы равна $2\sqrt{3}$ м. Какой наибольший объём может иметь такая призма?

С6. При каких значениях параметра k прямая $y = -4k - 3$ и график функции $y = \cos^2 x - 2k \sin x$ имеют хотя бы одну общую точку?

Вариант №18

Часть 1

В1. Упростите выражение $-5 \sin^2 x + 2 - 5 \cos^2 x$.

В2. Решите уравнение $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наибольшее значение функции $y = 2 \cos 2x + 3$.

В4. Определите, при каком наибольшем значении x выполняется равенство $y'(x) = 0$, если известно, что $y(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x$.

В5. Упростите выражение $\operatorname{ctg}^2 x (3 - 3 \cos^2 x)$, если $\cos x = 0,1$.

В6. Решите уравнение $2 \cos^2 \frac{x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3} - 2 = 0$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ запишите в градусах.

В7. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \sqrt{5 - 2x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

В8. Вычислите $\frac{\cos 66^\circ \cos 42^\circ + \cos 24^\circ \cos 48^\circ}{\sin^2 12^\circ - \cos^2 12^\circ}$.

В9. При движении тела по прямой расстояние $s(t)$ (в метрах) от фиксированной точки P до тела изменяется по закону $s(t) = 8t^2 + 7t + \sin t + 1$ (t — время движения тела в секундах). Какой была скорость тела в момент начала движения?

В10. Найдите максимум функции $y = -x^4 + \frac{x}{2} - 1$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. График её производной изображён на рисунке 67. Найдите число точек минимума функции $y = f(x)$.

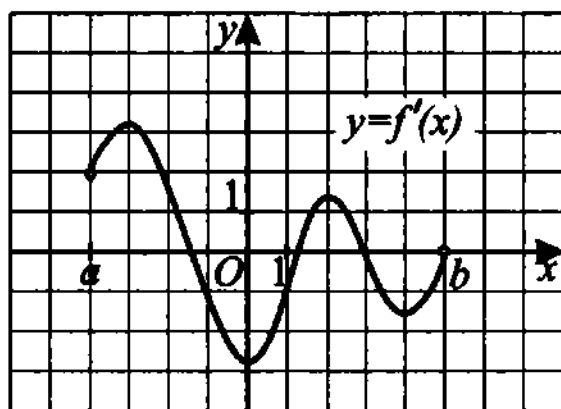


Рис. 67.

В12. Найдите наименьший положительный период функции $y = 5 \sin 2x + 7 \cos x$ (считать число π равным 3).

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{9 - x^2}(\cos x - \sin x)^6 = 0$?

С2. При каком натуральном значении k уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - k = 0$ имеет ровно два корня?

С3. Решите уравнение $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$.

С4. Найдите множество значений функции

$$y = 2 \arcsin \left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} (\sin x - \cos x - 3\sqrt{2}) \right).$$

С5. Найдите наибольший объём правильной четырёхугольной призмы, периметр диагонального сечения которой равен 6 дм.

С6. Найдите все значения параметра p , при котором прямая $y = 3 - p$ и график функции $y = p \operatorname{ctg}^2 x + \sin x$ имеют хотя бы одну общую точку.

Вариант №19

Часть 1

В1. Упростите выражение $2 \sin^2 x + 4 + 2 \cos^2 x$.

В2. Решите уравнение $2 \cos x - 1 = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наименьшее значение функции $y = 4 + 2 \sin 4x$.

В4. При каких целых значениях x выполняется равенство $f'(x) = 8$, если известно, что $f(x) = x^3 - x^2 - 13$?

В5. Упростите выражение $\operatorname{tg}^2 x (\sin^2 x - 1)$, если $\sin x = 0,2$.

В6. Решите уравнение $\cos^2 2x + 3 \cos 2x + 2 = 0$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ запишите в градусах.

В7. На графике функции $y = 2\sqrt{3-x}$ найдите абсциссу точки, в которой касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 135° .

В8. Вычислите
$$\frac{\sin 75^\circ \sin 43^\circ - \sin 15^\circ \sin 47^\circ}{-2 \sin 14^\circ \cos 14^\circ}.$$

В9. Уравнение зависимости пройденного точкой M пути $s(t)$ (в сантиметрах) от времени t (в секундах) имеет вид $s(t) = 5 \sin^2 t$. Найдите максимальное ускорение точки M .

В10. Найдите длину наибольшего промежутка убывания функции

$$y = x + \frac{4}{x} + 3.$$

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$. На рисунке 68 изображён график производной $y = f'(x)$. Найдите количество промежутков возрастания функции $y = f(x)$.

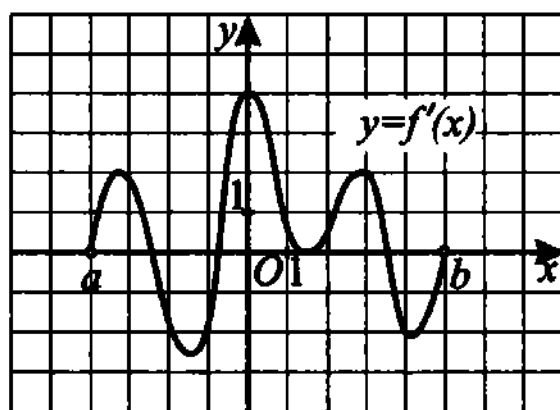


Рис. 68.

В12. При каком наименьшем положительном значении параметра k период функции $y = -7 \sin\left(kx + \frac{\pi}{12}\right)$ равен $\frac{\pi}{7}$?

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2} \left(2 - \frac{2}{\sin^2 x}\right) = 0$?

С2. При каком наибольшем целом значении a уравнение $\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + \frac{5}{3} - a = 0$ имеет ровно три корня?

С3. Решите уравнение $\sin 2x + 1 = \sin^2 x + 6 \operatorname{ctg} x$.

С4. Найдите множество значений функции $y = 3 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2} + \sin x - \cos x}{2\sqrt{2}} \right)$.

С5. Определите наименьшее значение периметра прямоугольного треугольника, если его площадь равна 8 см^2 .

С6. При каких значениях параметра m прямая $y = 3m - 2m^2$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \sin^2 x + m \cos x$?

Вариант №20

Часть 1

В1. Упростите выражение $2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x \operatorname{ctg}^2 x$.

В2. Решите уравнение $\sqrt{5} \sin x = 0$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ответ запишите в градусах.

В3. Найдите наименьшее значение функции $y = 1,5 - 2 \sin x$.

В4. При каких значениях x выполняется равенство $f'(x) = 4$, если известно, что $f(x) = (3 - 2x)^2$?

В5. Упростите выражение $5 + 2 \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x$, если $\sin^2 x = 0,3$.

В6. Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{2} - 5 \sin \frac{x}{2} + 4 = 0$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ запишите в градусах.

В7. На графике функции $y = 2\sqrt{3x}$ найдите абсциссу точки, в которой касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол 60° .

В8. Вычислите $\frac{3 \cos 28^\circ \cos 34^\circ - 3 \cos 62^\circ \cos 56^\circ}{\sin 74^\circ \cos 46^\circ - \cos 44^\circ \sin 16^\circ}$.

В9. Точка A совершает прямолинейные колебания по закону $x(t) = 14 \cos(2t + 3) + 7$, где x — перемещение в сантиметрах, t — время в секундах. Найдите максимальное ускорение точки A .

В10. Найдите минимум функции $y = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} - 5x + \frac{2}{3}$.

В11. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-4; 7)$. График её производной изображён на рисунке 69. Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$.

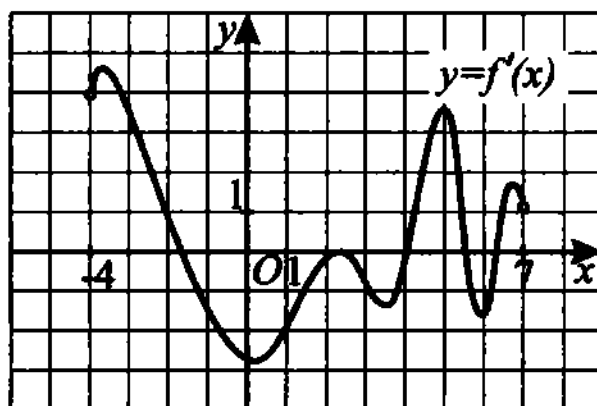


Рис. 69.

В12. Найдите наименьший положительный период функции $y = 2 \cos^2 2x$ (считать число π равным 3).

Часть 2

С1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{16 - x^2}(\sin x - \cos x) = 0$?

С2. При каком наименьшем значении a уравнение

$\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x - a = 0$ имеет ровно два корня?

С3. Решите уравнение $\sin x + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 2$.

С4. Найдите множество значений функции $y = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{3} \left(\cos 4x \sin 4x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 8x \right)^2 \right)$.

С5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $BD = 4\sqrt{2}$ м, а $AA_1 = 1$ м. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда, имеющего наибольший объём.

С6. Найдите наибольшее целое отрицательное значение параметра a , при котором графики функций $f(x) = \cos^2 x - 4a$ и $g(x) = 4 - 2a \cos x$ не имеют общих точек.

Ответы к тестам

Ответы к заданиям В

№	В1	В2	В3	В4	В5	В6	В7	В8	В9	В10	В11	В12
1	29	4	4	10	21000	3	157,5	1	39	-2,5	400	6
2	432	4	-1	38	450	5	4	-3	2,25	-1	45	25
3	25	115	1	25	325	1,6	4	2	1	-1	16	6
4	85	60	1	37,5	430	3	4	-1	-1,5	-19	8	125
5	3995	5	7	25	27200	2	60	2	2,75	1	20	20
6	6480	4	8	6	40700	1	45	2	8	-1	10	48
7	4200	2	4	20	4620	-2,8	60	0	70	8	10	72
8	25	10	4	12	2800	-1,75	-45	-1	2	6	1	24
9	8	25	1	32	3220	7	45	1,33	6,25	0,5	25	96
10	8	15	4	29	1620	9	15	-1,33	4,75	-3	20	360
11	6	60	6	2	0,04	90	-0,5	1	1	3	2	0,5
12	2	0	-0,5	1	5,6	180	2	-1	3	2	1	-4
13	0	-90	2	1	-4,52	30	0,04	3,5	3	-10	2	0,25
14	-2	30	3	1	5	90	-1	2	6	4	-1	2
15	5	180	7	0,5	-2,5	120	1	2	2	1	3	0,25
16	3	30	-3	4	3,5	60	-3	-1	2	-1	2	-0,5
17	2,7	30	7	-1	1,2	180	-2	0,5	2	1	-3	6
18	-3	60	5	1	0,03	180	-1	-1	8	-0,8125	1	6
19	6	60	2	2	-0,04	90	2	-1	10	2	2	14
20	2	0	-0,5	2	5,6	180	1	3	56	-5	2	1,5

Ответы к заданиям С

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
1	$\frac{\pi}{4} + \pi n, 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$[-0,25e^{-33}; +\infty)$	12,48	$4(2\sqrt{3} + \sqrt{6})$	± 1	$0,4\sqrt{39}$
2	$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$	$[-3,5625; 7]$	$12, \frac{16}{3}$	$\frac{32}{3}$	$a < -1$ — нет решений; $a = -1 \Rightarrow x = -1$; $-1 < a \leq -\frac{3}{4} \Rightarrow x =$ $= 2a + 1 \pm 2\sqrt{a+1}$; $a > -\frac{3}{4}, x =$ $= 2a + 1 + 2\sqrt{a+1}$	$(5; -2), (-5; 2)$
3	$\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$[0; \sqrt{2}]$	12	7	$(-1; 1]$	50
4	$\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$[\sqrt{2}; \sqrt{6}]$	5	8	$[5; 6)$	112
5	$\pi k, \pm \arccos \sqrt{\frac{5}{8}} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$[0; 2\sqrt{2}]$	9,75	$6 + 6\sqrt{2}$	$\left(-3; -\frac{1}{2}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{3}{2}; 2\right)$	$\frac{\sqrt{85}}{2}; 2\sqrt{7};$ $\frac{\sqrt{145}}{2}$
6	$\pi n; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$[0; 2\sqrt{2}]$	$\frac{8\sqrt{2}}{5}$	$16 + 8\sqrt{2}$	$[-2; -1] \cup [3; 4]$	$\frac{\sqrt{34}}{2}, \frac{\sqrt{70}}{2}$
7	$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$[0; 10]$	9	$10 + 10\sqrt{2}$	$[0; 1) \cup [2; +\infty)$	92
8	$\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$	60	25	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $\arctg \frac{1}{2} + \pi(2k + 1);$ $k \in \mathbb{Z}$	375

Ответы к заданиям С (Продолжение)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
9	Решений нет	$[5 - 4\sqrt{2}; 5 + 4\sqrt{2}]$	5	15	$a \in (-12; -6] \cup [0; +\infty)$	0
10	$\frac{1}{2} \cdot (-1)^n \cdot \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$[7 - 3\sqrt{2}; 7 + 3\sqrt{2}]$	$12\sqrt{2}$	30	$a \in (-11; -10] \cup [0; +\infty)$	$2k - 1$, где $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 1005$
11	5	4	$\frac{\pi n}{2}, \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$	120	$(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$
12	3	-9	$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$	$[-1; 1]$	8	$(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$
13	3	-112	$\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$	2	$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$
14	4	18	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$[\frac{\pi}{2} + 1; \pi + 1]$	$2\sqrt{2}$	2
15	5	-5	$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$[0; 2]$	4	1
16	6	10	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$[1; 3]$	2, 2, 2	$(0; 7]$
17	7	4	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$	$[-4; 4]$	16	$[-1,5; -0,5]$

Ответы к заданиям С (Окончание)

№	C1	C2	C3	C4	C5	C6
18	4	27	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$	2	$(0; 4]$
19	4	10	$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$	$8 + 4\sqrt{2}$	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$
20	5	-36	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$	48	-2

Решение варианта №1

В1. После повышения цены на 20% тетрадь будет стоить $20 + 20 \cdot 0,2 = 24$ рубля. На 700 рублей можно купить $700 : 24 \approx 29,17$ тетрадей. Целое число, удовлетворяющее условию, — 29 тетрадей.

Ответ: 29.

В2. Наибольшая температура воздуха 5 марта 4°C .

Ответ: 4.

В3. $3(\cos^2 x + \sin^2 x) + 1 = 3 + 1 = 4$.

Ответ: 4.

В4. $S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{1}{2}(15 + 5) = 10 \text{ (см}^2\text{)}.$

Ответ: 10.

В5. 1) $60 \cdot 280 + 12\,000 = 28\,800$ (руб.)

2) $60 \cdot 320 + 10\,000 = 29\,200$ (руб.)

3) $60 \cdot 350 = 21\,000$ (руб.)

За самую дешёвую покупку нужно заплатить 21 000 рублей.

Ответ: 21 000.

В6. Возведём обе части неравенства в квадрат, учитывая, что $|2x + 1| \geq 0$ и $|3x - 1| \geq 0$. Получим $(2x + 1)^2 - (3x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(2x + 1 + 3x - 1)(2x + 1 - 3x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 5x(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$.

Исходное неравенство имеет три целых решения: 0; 1; 2.

Ответ: 3.

В7. $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2},$

$$2x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Промежутку $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ принадлежит единственное решение

$$x = \frac{7\pi}{8} \text{ (см. рис. 70), } \frac{7\pi}{8} = 157,5^\circ.$$

Ответ: 157,5.

В8. $f'(2) = \operatorname{tg} \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{3} = 1$ (см. рис. 71).

Ответ: 1.

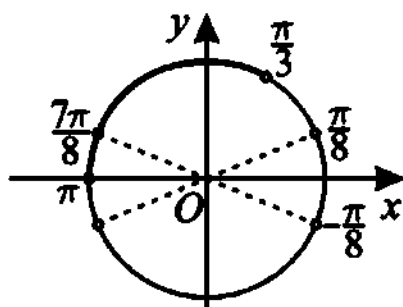


Рис. 70.

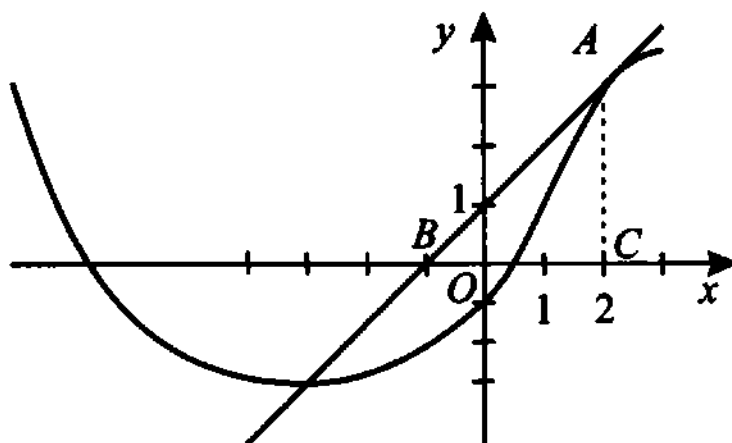


Рис. 71.

B9. $v(t) = s'(t) = -8t + 25$, $v(t) = 1$, $-8t + 25 = 1$, $t = 3$.
 $s(3) = -4 \cdot 3^2 + 25 \cdot 3 = 39$ (м).

Ответ: 39.

B10. $y'(x) = e^{2x} + (x + 2) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}(1 + 2x + 4) = e^{2x}(2x + 5)$.
 $y'(x) = 0$, $x = -2,5$.

При $x < -2,5$, $y'(x) < 0$, при $x > -2,5$, $y'(x) > 0$.

Следовательно, $x = -2,5$ — точка минимума заданной функции.

Ответ: $-2,5$.

B11. 1) $\frac{400 \cdot 40}{100} = 160$ (г) железа содержится в сплаве.

2) $400 - 160 = 240$ (г) цинка содержится в сплаве.

3) Пусть надо добавить x г цинка, чтобы получился сплав, содержащий 80 % цинка. Составим уравнение:

$$\frac{(240 + x) \cdot 100}{400 + x} = 80,$$

$$2400 + 10x = 3200 + 8x,$$

$$2x = 3200 - 2400,$$

$$2x = 800,$$

$$x = 400.$$

Надо добавить 400 г цинка, чтобы получился сплав, содержащий 80% цинка.

Ответ: 400.

В12. По условию призма правильная, следовательно, $AB_1 = CB_1$ как диагонали равных граней, значит, $\triangle AB_1C$ — равнобедренный, B_1K — высота (см. рис. 72).

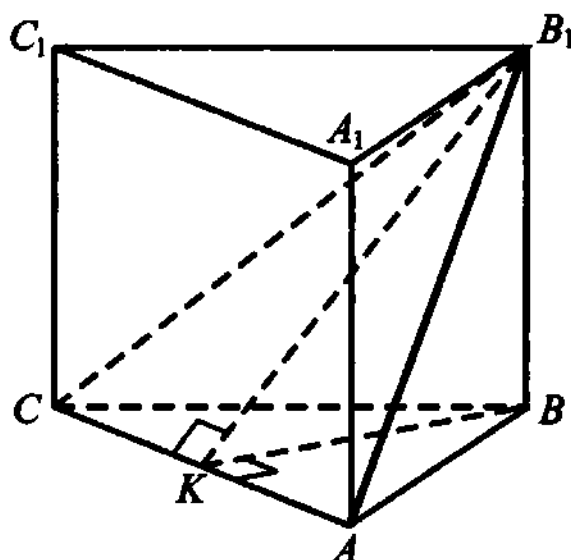


Рис. 72.

$\triangle ABC$ — правильный, высота $BK = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$.

В $\triangle KBB_1$ по теореме Пифагора $B_1K^2 = BK^2 + BB_1^2$,

$$B_1K = \sqrt{3^2 + 3} = 2\sqrt{3}.$$

$$S_{AB_1C} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot B_1K, \quad S_{AB_1C} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

Ответ: 6.

$$C1. (1 - \sin 2x) + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x + 1) = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0, \\ \sin x - \cos x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = \cos x, \\ \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -1; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

С2. $y'(x) = e^{4x} + 4(x+8)e^{4x} = e^{4x}(4x+33)$.

$y'(x) = 0, x = -8,25$.

При $x < -8,25$ имеем $y'(x) < 0$, при $x > -8,25$ имеем $y'(x) > 0$.

Функция $y = (x+8)e^{4x}$ имеет единственную точку экстремума — точку минимума $x = -8,25$, следовательно,

$y_{\text{наим.}} = y(-8,25) = (-8,25+8) \cdot e^{4 \cdot (-8,25)} = -0,25 \cdot e^{-33}$.

Промежуток $[-0,25 \cdot e^{-33}; +\infty)$ — множество значений заданной функции.

Ответ: $[-0,25 \cdot e^{-33}; +\infty)$.

С3. 1) По условию AT — биссектриса угла A , значит, $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AM , следовательно, $\triangle ABM$ равнобедренный, $BM = AB = 2$ (см. рис. 73).

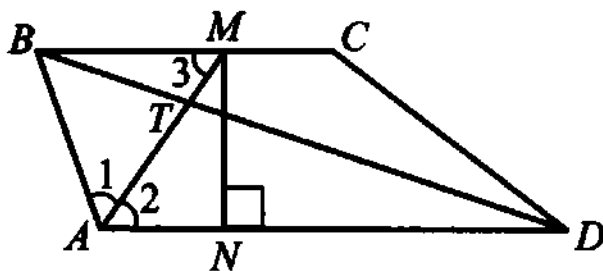


Рис. 73.

2) $\triangle ATD \sim \triangle MTB$ ($\angle 2 = \angle 3$, $\angle ATD = \angle MTB$ как вертикальные).

Из подобия треугольников следует $\frac{AD}{BM} = \frac{AT}{MT}$,

$$MT = \frac{BM \cdot AT}{AD} = \frac{2 \cdot 1,92}{8} = 0,48.$$

$$AM = AT + MT = 1,92 + 0,48 = 2,4.$$

3) В $\triangle ABM$ по теореме косинусов

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2 \cdot AB \cdot AM \cdot \cos \angle 1;$$

$$\cos \angle 1 = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \cdot AB \cdot AM} = \frac{2^2 + 2,4^2 - 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 2,4} = 0,6,$$

$$\sin \angle 1 = \sin \angle 2 = 0,8.$$

$$4) \text{ В } \triangle ANM \text{ } MN \perp AD, \sin \angle 2 = \frac{MN}{AM},$$

$$MN = AM \cdot \sin \angle 2 = 2,4 \cdot 0,8 = 1,92.$$

$$5) S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot MN = \frac{5 + 8}{2} \cdot 1,92 = 12,48.$$

Ответ: 12,48.

С4. Обозначим $AC = x$, $BC = y$ (см. рис. 74), тогда $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC, \frac{1}{2}xy = 24, y = \frac{48}{x}.$$

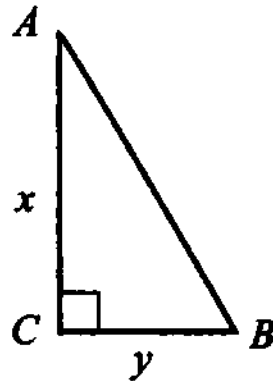


Рис. 74.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{48^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^4 + 48^2}}{x}.$$

$$P_{ABC} = x + \frac{48}{x} + \frac{\sqrt{x^4 + 48^2}}{x}.$$

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции

$$p(x) = x + \frac{48}{x} + \frac{\sqrt{x^4 + 48^2}}{x} \text{ на промежутке } x > 0.$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 1 - \frac{48}{x^2} + \frac{2x^4 - x^4 - 48^2}{x^2 \sqrt{x^4 + 48^2}} = \\ &= \frac{(x^2 - 48) \cdot \sqrt{x^4 + 48^2} + (x^2 - 48)(x^2 + 48)}{x^2 \sqrt{x^4 + 48^2}} = \\ &= \frac{(x^2 - 48)(\sqrt{x^4 + 48^2} + x^2 + 48)}{x^2 \sqrt{x^4 + 48^2}}; \end{aligned}$$

$$p'(x) = 0, x^2 - 48 = 0, x > 0, x = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{При } x < 4\sqrt{3} \text{ } p'(x) < 0, \text{ при } x > 4\sqrt{3} \text{ } p'(x) > 0.$$

Функция $p(x)$ на промежутке $x > 0$ имеет единственную точку экстремума — точку минимума $x = 4\sqrt{3}$, следовательно в этой точке она принимает наименьшее значение.

$$p_{\text{наим.}} = p(4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + \frac{48}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{48^2 + 48^2}}{4\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} = 4(2\sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

Ответ: $4(2\sqrt{3} + \sqrt{6})$.

С5. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} a + 1 - |x - 1| = 0, \\ a + x^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что каждое из уравнений совокупности может иметь не более двух корней.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Уравнение $a + 1 - |x - 1| = 0$ имеет один корень, а уравнение $a + x^2 - 2x = 0$ — два корня.

Уравнение $a + 1 - |x - 1| = 0$ имеет один корень, если $a + 1 = 0$, $a = -1$.

При $a = -1$ уравнение $a + x^2 - 2x = 0$ примет вид $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 - \sqrt{2}, \\ x = 1 + \sqrt{2}, \end{cases} \text{ — два корня.}$$

$a = -1$ — удовлетворяет условию задачи.

2. Уравнение $a + x^2 - 2x = 0$ имеет один корень, а уравнение $a + 1 - |x - 1| = 0$ имеет два корня.

Уравнение $a + x^2 - 2x = 0$ имеет один корень, если трёхчлен $x^2 - 2x + a$ — полный квадрат. Это условие выполняется только при $a = 1$.

При $a = 1$ уравнение $a + 1 - |x - 1| = 0$ примет вид $2 - |x - 1| = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -1, \\ x = 3, \end{cases} \text{ — два корня.}$$

$a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: ± 1 .

$$\text{С6. } 25c^2 - 60c + 36 = 6a^2 - 60c + 168,$$

$$25c^2 = 6a^2 + 132,$$

$$c^2 = \frac{6a^2 + 132}{25}, \quad c > 0$$

$$c = \sqrt{\frac{6a^2 + 132}{25}}.$$

Найдём, при каком значении a целая часть числа c равна a , решив неравенство

$$a < c < a + 1, \text{ где } a \in \mathbb{N},$$

$$a < \sqrt{\frac{6a^2 + 132}{25}} < a + 1,$$

$$a^2 < \frac{6a^2 + 132}{25} < (a + 1)^2.$$

$$\begin{cases} 6a^2 + 132 > 25a^2, \\ 6a^2 + 132 < 25a^2 + 50a + 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < \frac{132}{19}, \\ 19a^2 + 50a - 107 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |a| < \sqrt{\frac{132}{19}}, \\ \begin{cases} a < \frac{-25 - \sqrt{2658}}{19}, \\ a > \frac{-25 + \sqrt{2658}}{19}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{-25 + \sqrt{2658}}{19}; \sqrt{\frac{132}{19}} \right).$$

Учитывая, что $a \in \mathbb{N}$, получим $a = 2$.

При $a = 2$ имеем $c = \sqrt{\frac{6 \cdot 2^2 + 132}{25}} = \sqrt{6,24} = 0,4\sqrt{39}$.

Ответ: $0,4\sqrt{39}$.

Решение варианта №11

B1. $2(\sin^2 x + \cos^2 x) + 4 = 2 + 4 = 6$.

Ответ: 6.

B2. $\cos x = \frac{1}{2}$;

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ принадлежит единственное решение $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ (см. рис. 75).

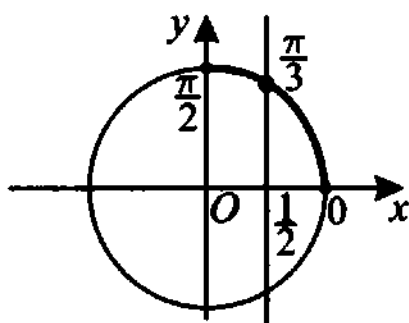


Рис. 75.

Ответ: 60.

B3. $-1 \leq \sin 4x \leq 1$;

$$-2 \leq 2 \sin 4x \leq 2;$$

$2 \leq 4 + 2 \sin 4x \leq 6$, все промежуточные значения достигаются.
Наибольшее значение функции $y = 4 + 2 \sin 4x$ равно 6.

Ответ: 6.

$$\text{B4. } f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 3, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}} + 3;$$

$$\frac{2}{\sqrt{x-1}} + 3 = 5, \quad \frac{2}{\sqrt{x-1}} = 2;$$

$$\sqrt{x-1} = 1, \quad x = 2.$$

Ответ: 2.

$$\text{B5. } \operatorname{ctg}^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = \cos^2 x.$$

Если $\cos x = 0,2$, то $\cos^2 x = (0,2)^2 = 0,04$.

Ответ: 0,04.

$$\text{B6. } \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -2, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

1. Уравнение $\cos 2x = -2$ не имеет решений, так как $|\cos 2x| \leq 1$.

2. $\cos 2x = -1$, $2x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только одно решение $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
(см. рис. 76).

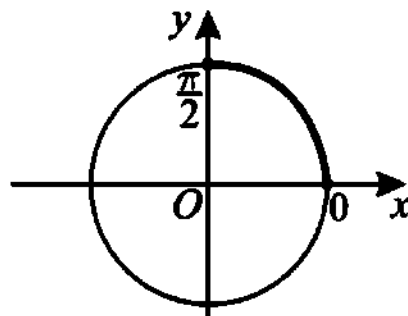


Рис. 76.

Ответ: 90.

$$\text{B7. } y'(x) = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{x}{3};$$

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{x}{3}.$$

$$k = y'(x_0), \quad k = y'(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: -0,5.

$$\text{В8. } \frac{\cos 26^\circ \cdot \cos 22^\circ - \cos(90^\circ - 26^\circ) \cdot \cos(90^\circ - 22^\circ)}{\sin 42^\circ} =$$

$$\frac{\cos 26^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 26^\circ \cdot \sin 22^\circ}{\sin(90^\circ - 48^\circ)} = \frac{\cos 48^\circ}{\cos 48^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

В9. $x'(t) = 3t^2 + 2t$ — скорость движения точки в момент времени t ;

$x''(t) = 6t + 2$ — ускорение движения точки в момент времени t .

Следовательно, имеем $6t + 2 = 8$, $6t = 6$, $t = 1$.

Ускорение точки будет равно 8 м/с^2 в момент времени $t = 1 \text{ с}$.

Ответ: 1.

$$\text{В10. } y'(x) = x^2 - 8x + 15.$$

$$y'(x) = 0, \quad x^2 - 8x + 15 = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 5. \end{cases}$$

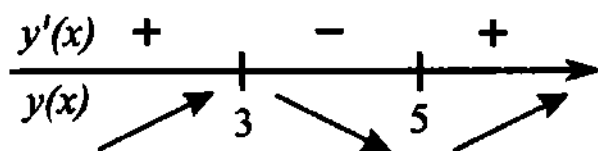


Рис. 77.

При переходе через точку $x = 3$ производная меняет знак с плюса на минус.

$x = 3$ — точка максимума.

$$y(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 - 15 = 9 - 36 + 45 - 15 = 3.$$

$$y(3)=3 \text{ — максимум функции } y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 15x - 15.$$

Ответ: 3.

В11. По графику производной функции $y = f'(x)$ определяем, что при переходе через точки $x = -1$ и $x = 2,5$ производная меняет знак с «минуса» на «плюс», следовательно, функция $y = f(x)$ имеет две точки минимума.

Ответ: 2.

$$\begin{aligned} \text{В12. } y(x + 8\pi) &= \frac{1}{2} \cos\left(a^2(x + 8\pi) + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(a^2x + \frac{\pi}{3} + 8\pi a^2\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cos\left(\left(a^2x + \frac{\pi}{3}\right) + 8\pi a^2\right) = \frac{1}{2} \cos\left(a^2x + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Зная, что наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен 2π , составим уравнение $8\pi a^2 = 2\pi$.

$$a^2 = \frac{2\pi}{8\pi}, \quad a^2 = \frac{1}{4}, \quad |a| = 0,5.$$

По условию $a > 0$, $a = 0,5$.

Ответ: 0,5.

$$C1. \sqrt{16 - x^2} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 2 \right) = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 16 - x^2 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{\cos^2 x} - 2 = 0, \\ 16 - x^2 \geq 0; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 4, \\ x = -4, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ |\cos x| = 1, \\ |x| \leq 4; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4, \\ x = -4; \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq 4. \end{cases} \end{cases}$$

Найдём $x = \pi n$, принадлежащие промежутку $[-4; 4]$.

$$x_1 = -\pi, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \pi.$$

Исходное уравнение имеет пять корней.

Ответ: 5.

$$C2. -x^3 - 3x^2 + 8 = a.$$

Задача сводится к нахождению наименьшего значения a , при котором график функции $y = -x^3 - 3x^2 + 8$ и прямая $y = a$ имеют ровно две общие точки.

$$y'(x) = -3x^2 - 6x = -3x(x + 2)$$

$$y'(x) = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = -2.$$

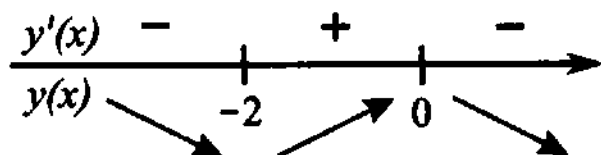


Рис. 78.

При $x < -2$ имеем $y' < 0$, при $-2 < x < 0$ имеем $y' > 0$, при $x > 0$ имеем $y' < 0$ (см. рис. 78), следовательно $x = -2$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума.

$$y(-2) = 8 - 12 + 8 = 4, \quad y(0) = 8 \text{ (см. рис. 79).}$$

Исходное уравнение имеет ровно два корня при $a = 8$ и $a = 4$. Наименьшее значение a равно 4.

Ответ: 4.

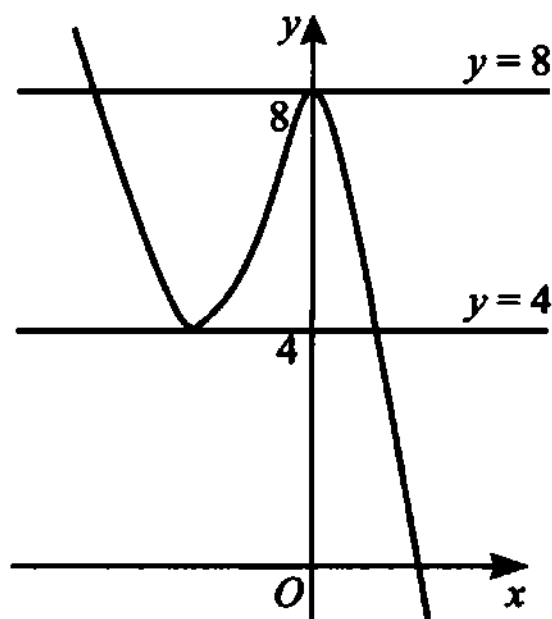


Рис. 79.

С3. ОДЗ: $\cos 6x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{\sin 6x \cos 2x}{\cos 6x} - \sin 2x - 2 \sin 4x = 0,$$

$$\sin 6x \cos 2x - \sin 2x \cos 6x - 2 \sin 4x \cos 6x = 0,$$

$$\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 8x) - \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 4x) - (\sin 10x - \sin 2x) = 0,$$

$$\sin 4x + \sin 8x - \sin 8x + \sin 4x - 2 \sin 10x + 2 \sin 2x = 0,$$

$$\sin 4x + \sin 2x - \sin 10x = 0,$$

$$\sin 4x - 2 \sin 4x \cos 6x = 0, \text{ дописывая условие ОДЗ, получим}$$

$$\begin{cases} \sin 4x(1 - 2 \cos 6x) = 0, \\ \cos 6x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0, \\ \cos 6x = \frac{1}{2}, \\ \cos 6x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0, \\ \cos 6x \neq 0, \\ \cos 6x = \frac{1}{2}, \\ \cos 6x \neq 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z}, \\ 6x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi n}{2}; \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{С4. } \sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1, \quad -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2},$$

$$0 \leq \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2\sqrt{2}, \quad 0 \leq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{4} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

все промежуточные значения достигаются;

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \arccos \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{4} \right) \leq \arccos 0,$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \arccos \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{4} \right) \leq \frac{\pi}{2}, \text{ все промежуточные значения достигаются.}$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right]$.

$$\text{С5. } S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

Пусть $AA_1 = a$, $AD = b$ (см. рис. 80).

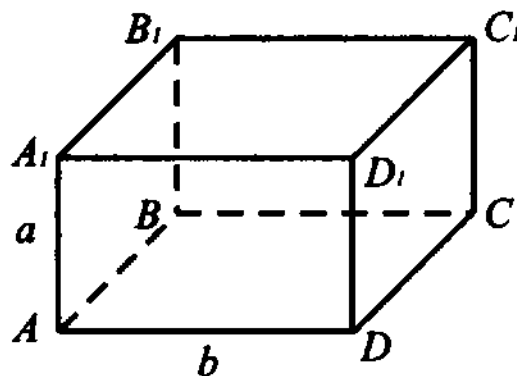


Рис. 80.

По условию $ABCD$ — квадрат, $S_{ABCD} = b^2$, $S_{\text{бок.}} = 4ab$.
 $S_{\text{полн.}} = 4ab + 2b^2$.

$$4ab + 2b^2 = 600, \quad a = \frac{300 - b^2}{2b}.$$

Обозначим длину всех рёбер прямоугольного параллелепипеда через l .

$$l = 4a + 8b = \frac{4(300 - b^2)}{2b} + 8b = \frac{600 + 6b^2}{b}.$$

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции.

$$l(b) = \frac{600 + 6b^2}{b} \text{ при } b > 0.$$

$$l'(b) = \frac{12b^2 - 600 - 6b^2}{b^2} = \frac{6b^2 - 600}{b^2} = \frac{6(b - 10)(b + 10)}{b^2}.$$

$l'(b) = 0$ при $b = 10$, $b = -10$ — не удовлетворяет условию $b > 0$.

При переходе через точку $b = 10$ первая производная $l'(b)$ меняет знак с «минуса» на «плюс» (см. рис. 81).

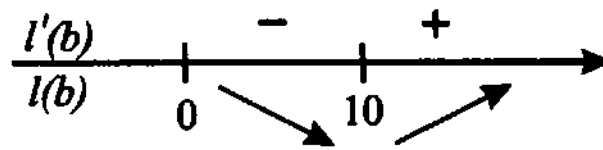


Рис. 81.

$b = 10$ — точка минимума. Это единственная точка экстремума исследуемой функции на промежутке $(0; +\infty)$.

$$l(10) = \frac{600 + 6 \cdot 10^2}{10} = 120 \text{ (см)}.$$

Ответ: 120 см.

С6. Задача сводится к нахождению значений p , при которых уравнение $p \sin^2 x + 2 \cos x - p = 4 - 2p \cos x$ имеет хотя бы один корень.

$$p(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + 2p \cos x - p - 4 = 0;$$

$$p \cos^2 x - 2(1 + p) \cos x + 4 = 0.$$

Обозначим $\cos x = t$, $|t| \leq 1$.

Уравнение примет вид $pt^2 - 2(1 + p)t + 4 = 0$.

1. $p = 0$, $-2t + 4 = 0$, $t = 2$ — не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

$$2. \ p \neq 0, t_{1,2} = \frac{1 + p \pm \sqrt{1 + 2p + p^2 - 4p}}{p} = \frac{1 + p \pm \sqrt{(1 - p)^2}}{p};$$

$$t_1 = \frac{1 + p + 1 - p}{p} = \frac{2}{p}, \quad t_2 = \frac{1 + p - 1 + p}{p} = 2 \text{ — не удовлетворяет условию } |t| \leq 1.$$

3. Учитывая, что $|t| \leq 1$, имеем $\left| \frac{2}{p} \right| \leq 1$; $|p| \geq 2$, то есть

$$p \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$$

Ответ: $p \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Литература

1. *Башмаков М. И.* Алгебра и начала анализа, 10 кл. — М.: Дрофа, 2010.
2. *Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Седова Е. А.* Алгебра и начала анализа. Ч. 1, 2. 10 кл. — М.: Дрофа, 2010.
3. *Колягин Ю. М.* Алгебра и начала анализа, 10 кл. — М.: Просвещение, 2010.
4. *Мордкович А. Г., Семенов П. В.* Алгебра и начала анализа, 10 кл. — М.: Мнемозина, 2010.
5. *Муравин Г. К.* Алгебра и начала анализа, 10 кл. — М.: Дрофа, 2010.

Промежуточная аттестация

Учебное издание

**МАТЕМАТИКА. 10-й КЛАСС.
ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ
И ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ**

Учебно-методическое пособие

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

Издание второе, переработанное

Обложка *В. Кириченко*

Корректор *М. Федорова*

Подписано в печать 30.06.2011.

Формат 60х84¹/₁₆. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,14.

Тираж 10 000 экз. Заказ № 2039

Издательство ООО «ЛЕГИОН-М» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

ООО «ЛЕГИОН-М»

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.

www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в ОАО ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300, Чехов Московской области.

E-mail: marketing@chpk.ru Сайт www.chpk.ru

Телефон 8 (495)988-63-87 Факс 8 (496)726-54-10

**Пособия издательства «Легион» можно приобрести
в книоторговых организациях:**

АБАКАН

ООО «Кругозор Иванова и К»
(3902) 22-36-40
ГОУ ДПО ХРИПК и ПРО
(3902) 22-70-12, 2-61-22

АНАПА

ИП Ладанова Н. И.
(86133) 3-72-76

АРХАНГЕЛЬСК

ООО «Оберег»
(8182) 65-12-41, 20-72-12, 65-24-77
Магазин учебной литературы
«Школьный мир»
(8142) 78-24-43

АСТРАХАНЬ

ИП Агаев Сархаддин Х.О.
8-960-859-53-89
ИП Агаев Сейфаддин Х.О.
(8512) 72-77-93
ИП Щенина В.В.
8-917-180-88-18, (8512) 22-33-62

БАРНАУЛ

ИП Нестеренко Т.Н.
(3852) 36-80-93

БЕЛГОРОД

ИП Бабьяк И. А.
(4722) 34-15-59
Областное государственное учреждение
«Квант»
(4722) 34-17-34, 34-30-28
ИП Поляков А.М.
(4722) 35-61-83

БЕЛЕБЕЙ, респ. Башкортостан

ООО «Предприятие Прогресс»
(34786) 448-61, 467-39, 450-89

БОРИСОГЛЕБСК Воронежской обл.

ИП Мусатов С.Ю.
(47354) 64-560

БРЯНСК

ООО «Александрия»
(4832) 66-52-30, 74-41-80
ИП Белкина И. В.
(4832) 67-68-40
ИП Трубка Л. И.
(4832) 74-92-20, 74-61-64

ВЕЛИКИЙ НОВГОРОД

ООО «Маркет-Сервис»
(8162) 62-30-47
ООО «Книжный магазин «Прометей»
(8162) 77-82-96, 77-30-21

ВЛАДИМИР

ИП Митина Л.Г.
8-960-721-40-48, 8-960-721-55-48
ОГОУ ДПО ВИПКРО
(4922) 36-63-94, 36-63-69
ООО «Талета»
(4922) 21-26-66

ВОЛГОГРАД

ИП Гражданкин Н.Н.
(8442) 93-04-65, 90-05-85, 95-54-11
ООО «Кассандра»
(8442) 97-58-00, 97-85-85
ООО «Учебная и деловая книга»
(8442) 76-06-06, 76-34-34, 76-60-92,
76-60-93

ВОЛОГДА

ОАО «Библиотечный коллектор»
(8172) 72-04-75, 21-05-86, 72-20-45
ОАО «Источник»
(8172) 72-42-38
ИП Соловьев А.В.
(8172) 72-61-28, 21-17-36

ВОРОНЕЖ

ООО «Амиталь»
(4732) 26-77-77, 24-24-90, 26-35-19,
26-35-60
ООО «Риокса»
(4732) 21-08-66, 46-13-26, 46-43-94

ВЫШНИЙ ВОЛОЧЕК

ИП Лебедев В. Ф.
(48233) 6-41-03, 8-910-930-86-35

ГЕОРГИЕВСК

ИП Куцева Т.И.
(87951) 6-77-43, 6-39-12
ИП Филатов В.П.
8-928-366-05-00

ДЕРБЕНТ

ИП Шисинов И. Ш.
(87240) 4-35-00

ДИМИТРОВГРАД

ООО «Учебник»
(84235) 7-48-48

ЕЙСК

ООО «Телеком»
(86132) 69-069

ЕКАТЕРИНБУРГ

ООО «Алис-Альянс»
(343) 355-33-86, 355-43-92
ИП Евтюгина Н.С.
(343) 228-10-91, 228-10-79

ИВАНОВО

ООО «Новая мысль»
(4932) 41-64-16
ИП Ракова О.В.
(4932) 30-04-28

ИЖЕВСК

ООО «Инвис»
(3412) 78-16-24
ООО «Свиток»
(3412) 78-22-24, 51-05-37
ООО «Учебно-методическая книга»
(3412) 78-35-04

ИОШКАР-ОЛА

ИП Бессолицын В.С.
(8362) 42-88-55
ИП Кошкин Н.Ю.
(8362) 63-41-55, 63-44-04
ИП Удальцова З.И.
(8362) 46-24-69

КАЗАНЬ

ИП Крамень И.Н.
(843) 292-46-51
ИП Микашкин В. Н.
8-903-344-90-63
ООО «Пегас»
(843) 272-34-55, 272-34-55, 295-12-71
ООО Торговый дом «Аист-Пресс»
(843) 525-55-40, 525-52-14

КАЛИНИНГРАД

ООО «Лабор»
(4012) 75-87-46

КАЛУГА

ИП Безбородова Т. И.
8-906-643-37-17
ИП Калуженский Г.В.
8-910-910-41-76
ИП Махонина А. А.
(4842) 56-10-10

ИП Настенко Т. Н.
8-910-913-08-49, (4842) 54-71-95

КИРОВ

ИП Кокорин Ю. П.
(8332) 29-40-40, 29-44-08

КОСТРОМА

ИП Аббакумова Э. О.
(4942) 31-53-76, 37-05-21, 37-04-21
ООО «Филлипок»
(4942) 41-50-91, 36-00-72
МУП города Костромы «Школьник»
(4942) 51-42-55, 31-25-58

КРАСНОДАР

ООО «Когорта»
(861) 279-54-21, 279-54-20
ООО «Ремикс»
(861) 267-24-49

КРАСНОЯРСК

ООО фирма «Градъ»
(391) 212-39-94; 226-91-45; 227-82-65;
ООО «Мила-В»
(391) 240-04-80

КУРГАН

ООО «Алис-К»
(3522) 24-61-04; 24-61-05
ООО «Кристалл»
(3522) 49-23-01

КУРСК

ООО «Аистенок»
(4712) 52-86-10
ИП Захаров С.Ю.
(4712) 35-16-51
ООО «Интеллект Образование XXI»
(4712) 52-97-03

КЫЗЫЛ, респ. Тыва

ИП Тунева Е. Г.
(39422) 2-29-27, 2-42-86, 2-42-86

ЛЕНИНОГОРСК, респ. Татарстан

ИП Исхакова Ф.Г.
(85595) 5-08-74

ЛИПЕЦК

ООО «ЛКТФ Книжный клуб 36,6»
(4742) 77-40-64, 48-79-32, 22-19-61,
22-19-50

МОСКВА

ООО «Абрис Д»
(495) 229-67-59

ООО ТД «БИБЛИО-ГЛОБУС»

(495) 621-78-39, 781-19-08, 621-19-47

ООО «Учебно-методический Центр «Глобус»

(495) 988-72-83, 721-17-13

НЕВИННОМЫСК

ИП Гагарин Н. В.

(86554) 6-74-94

НЕФТЕКАМСК

ИП Киямова Г. Ф.

(34783) 4-88-83, 9-07-34

НЕФТЕЮГАНСК

ИП Пугачева М.В.

(3463) 25-47-42

НИЖНИЙ НОВГОРОД

ИП Кулемина Л. М.

(831) 241-92-27, 241-95-57, 241-95-74

ИП Чернышев В. В.

(831) 436-58-14

НОВОРОССИЙСК

ООО «Центр социальных инициатив»

(8617) 63-17-04

НОВОСИБИРСК

ИП Березкина Е.В.

(383) 223-47-71

ИП Камалетдинов Р.Р.

(383) 28-999-06, 224-63-48

ООО «СиБВерк»

(383) 212-50-90

ОМСК

ООО «Принт ТФ»

(3812) 53-52-73, 53-42-73

ООО «Сфера»

8-960-989-48-65

ООО «Форсаж»

(3812) 23-35-71, 57-88-56, 53-89-67

ОРЕЛ

ЗАО «Орловский учебный коллектор»

(4862) 74-48-34, 75-29-11

ОРЕНБУРГ

ООО «Фирма «Фолиант»

(3532) 77-46-92, 77-40-33

ПЕРМЬ

ИП Жмыхова Г.И.

(342), 226-66-91, 226-44-10

ИП Габзалилов М.Х.

(342) 245-24-37

ПЕТРОЗАВОДСК

ООО «Азбука»

(8142) 78-55-03

ООО Книжный магазин «Экслибрис»

(8142) 76-33-76, 76-75-51

Пос. ЛАЗАРЕВСКАЯ Краснодарского края

ИП Зайцев А. А.

8-918-916-71-66, (8622)70-74-13

ПСКОВ

ИП Васильева А. В.

(8112) 66-25-04

ОАО «Псковский областной учебный коллектор»

(8112) 56-93-63, 58-58-36

ПЯТИГОРСК

ПБОЮЛ Бердникова Л.А.

(8793) 33-88-80, 39-47-17

ИП Борисковский В.А.

(8793) 39-02-54, 39-02-53

РОСТОВ-НА-ДОНУ

ООО «Алтай»

(863) 262-37-95

ООО «Донская школа»

(863) 267-56-11

ИП Евдокимов И. А.

(863) 279-39-11, 26-35-331

ОАО «Ростовкнига»

(863) 295-89-32, 278-36-23

ИП Рудницкий А.В.

(863) 291-03-53, 234-82-96

САМАРА

Магазин «Учебная книга»

(846) 995-58-68

ООО «МЕТИДА-ОПТ»

(846) 269-17-17

ООО «Чакона»

(846) 331-22-33

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

ООО «Век развития»

(812)924-04-58

ООО «Коллибри»

(812) 703-59-94; 703-59-95; 703-59-75

ООО «Санкт-Петербургский Дом Книги»

(812) 448-23-57

САРАНСК

ГУП РМ «Мордовское книжное издательство»

(8342) 47-05-91

САРАТОВ**ИП Вавилов О.Ю.**

(8452) 222-404

ООО «Гемера-Плюс»

(8452) 64-37-37, 64-78-24

ООО «Стрелец и К»

(8452) 52-25-24

СМОЛЕНСК**ИП Воронцов С.В.**

(4812) 65-62-94, 32-75-21

ИП Кормильцева И. В.

(4812) 38-93-52

ИП Кудашова Н.Н.

(4812) 65-86-65

СОЧИ**ООО «Анис»**

(8622) 92-33-51, 64-83-56

МУП г. Сочи «Книги»

(8622) 64-14-61, 64-69-28

СТАВРОПОЛЬ**ИП Апурин А.И.**

(8652) 28-07-30, 28-23-81

ИП Колесников А.П.

8-928-650-29-33

ООО «Ставрополь-Сервис-Школа»

(8652) 57-47-27, 72-87-40

СЫКТЫВКАР**ИП Коврижных Д.Г.**

(8212) 66-37-35

ТАГАНРОГ**ИП Боринский И.Г.**

(8634) 61-03-57

ТАМБОВСКАЯ ОБЛ.**ГОУ ДПО «Тамбовский областной ИПК
работников образования»**

(8-4752) 63-05-08

ТВЕРЬ**ООО «ВООК-СЕРВИС»**

(4822) 34-52-11

ООО «Кириллица»

(4822) 32-05-68

ТИХОРЕЦК**ООО «Астреля»**

(86196) 7-36-42, 7-36-53

ТОМСК**Книжный магазин-музей****«Петр Макушин»**

(3822) 51-58-33

ТУЛА**ООО «Система плюс»**

(4872) 31-29-23, 70-02-48, 32-60-94

ТЮМЕНЬ**ООО «Книжник»**

(3452) 35-72-12

ИП Нестеров В.А.

(3452) 20-56-10

УЛАН-УДЕ**ИП Шашина О. К.**

(3012) 22-01-05

УЛЬЯНОВСК**ИП Селезнев Ю. И.**

(8422) 53-33-33

УФА**ГУП Башучколлектор РБ**

(3472) 63-37-78, 83-95-66

ООО «Мир книги»

(3472) 82-56-30, 82-83-92, 82-89-65

ЧЕБОКСАРЫ**Чувашский учколлектор**

(8352) 56-08-55, 61-45-76, 62-85-57

Чувашский бибколлектор

(8352) 62-15-67, 62-03-70, 62-28-46

ЧЕЛЯБИНСК**ООО «ИнтерСервис ЛТД»**

(351) 247-74-14, 247-74-13

ООО ПК «Урал-пресс»

(351) 772-69-57, 773-48-37, 771-44-03

ЭЛИСТА**ИП Борлыкова Л.А.**

(84722) 2-86-42

ЯРОСЛАВЛЬ**ИП Зелинская Т.В.**

(4852) 73-40-07

ГОУ «Институт развития образования»

(4852) 73-93-00, 21-06-83



Рекомендует

Готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ ЕГЭ-2012 (С1, С3) ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ.

Уравнения, неравенства, системы

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова



Пособие содержит задания по отдельным темам, которые являются традиционными в курсе математики и потому, как правило, входят в ЕГЭ. Они полностью охватывают задания типа С1 и С3 последнего плана ЕГЭ. Каждой теме посвящен отдельный параграф, включающий 10 вариантов: 1 демонстрационный с решениями, 9 — тренировочных. Каждый вариант состоит из 8 заданий.

Цель настоящей книги — выработать навыки решения заданий с развернутым ответом тестов ЕГЭ. Это пособие необходимо всем выпускникам, стремящимся получить на ЕГЭ высокий балл, а также учащимся 10-х классов, которым нужно закрепить пройденные темы

под углом зрения ЕГЭ. Пособие также может быть полезно и педагогам, осуществляющим подготовку учащихся к ЕГЭ.



ЛЕГИОН

Сайт, интернет-магазин: www.legionr.ru
e-mail: legionrus@legionrus.com

Издательство включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 2 от 13.01.2011, зарегистрирован в Минюст 08.02.2011 № 19739.

**Издательство "Легион" предлагает
школьникам и учителям пособия
в серии "Промежуточная аттестация"**



ISBN 978-5-91724-086-2



9 785917 240862

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03

Опт, мелкий опт, интернет-магазин,
книга – почтой.